2026

FACULTAD DE
CIENCIAS VETERINARIAS
Universidad Nacional de La Pampa

[CUADERNILLO MATEMÁTICA]

FACULTAD DE CIENCIAS VETERINARIAS
Universidad Nacional de La Pampa

CARRERA

MEDICINA VETERINARIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁTEDRA

FÍSICA BIOLÓGICA

APUNTES DE MATEMÁTICA INGRESANTES

Cátedra de Física Biológica
Bilbao, María Guillermina
Tortone, Claudia Andrea
Marengo, María Lorena
Schwindt, César Hugo
Farcey, María Florencia
Leavi de Asís, Víctor Emanuel
Mazzaferro, Paula Vanesa
Gorra Vega, Milton César

2026

INTRODUCCION

Este cuadernillo de matemática fue elaborado con el propósito de ofrecer una base sólida de conocimientos que sirva de apoyo en el inicio de la vida universitaria. Contiene los contenidos fundamentales que todo estudiante debe manejar para comprender con mayor profundidad las materias básicas y, posteriormente, las asignaturas más avanzadas de su carrera. A lo largo de los capítulos, se abordan temas esenciales como los conjuntos numéricos, el cálculo porcentual, la potenciación y la radicación, la notación científica, la geometría, las ecuaciones, las funciones, las unidades de medida y el uso de la calculadora. El material busca acompañar el proceso de aprendizaje de manera gradual y clara, fortaleciendo el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la confianza en el uso del lenguaje matemático dentro del ámbito académico y en situaciones cotidianas. Te invitamos a recorrer este material con curiosidad, compromiso y una actitud activa hacia el aprendizaje, recordando que cada nuevo concepto representa un paso más hacia tu desarrollo académico y profesional.

Para discutir el porqué de aprender matemática, recuperamos el siguiente fragmento del artículo de Ignacio Zalduendo publicado en La Nación[1]:

Mientras describo, por ejemplo, la función logaritmo, un alumno levanta la mano y dice: "Profe, ¿y esto para qué me va a servir?"… Sí, claro, la matemática es muy útil. Es fácil mostrar ejemplos. Sin matemática no habría autos, remedios, teléfonos, encuestas, tomografías… No habría transporte, ni finanzas ni comunicación ni producción de casi nada. Pero la respuesta no es ésa, porque el chico quiere saber para qué le va a servir la matemática a él, no para qué le va a servir al mundo moderno.

Para algunos, los que en su vida profesional se ocuparán del diseño o la gestión de las actividades mencionadas arriba, la respuesta es que una parte de lo que están aprendiendo será una herramienta en su quehacer cotidiano o será el sustento teórico necesario sobre el que construirán otras herramientas más especializadas. De éstos, a los más creativos la matemática les resultará más útil por aquello de que uno termina echando mano a lo que sabe, y cuanto más sepa, mejor.

Pero hay otra parte de la respuesta sobre la utilidad de aprender matemática que debería ser aplicable absolutamente a todos, y reside en el poder formativo que tiene su estudio.

Y la matemática, cuando se enseña bien, deja hábitos y habilidades intelectuales básicas, esenciales para cualquier persona y de indudable valor social.

¿Por qué es formativa la matemática? En primer lugar, por su estructura lógica. Para hacer matemática (demostrar algo, resolver un problema) se necesitan muy pocos conceptos, pero bien definidos y que se han de manejar con un discurso razonado y despojado de prejuicios. Será importante distinguir lo esencial de lo accesorio, buscar analogías, cambiar el punto de vista y captar relaciones escondidas. Todo esto ha de

---
[1] **Por qué aprender matemática** Ignacio Zalduendo. 17 de Mayo de 2011.
(La Nación. Recuperado de http://www.lanacion.com.ar/1373956-por-que-aprender-matematica).

producirse dentro de una frontera delimitada por reglas claras. Reglas que no admiten doblez ni excepción.

En segundo lugar, por la creatividad que fomenta. Porque dentro de esas fronteras bien delimitadas que acabo de mencionar reina la libertad más absoluta. Vale todo. Sobra lugar para la imaginación y la creatividad (hay, por dar un ejemplo, más de 350 demostraciones del Teorema de Pitágoras). Nos guiamos por nuestra intuición y sentido estético. Así, la matemática es personal. Tanto que no pocas veces, cuando se lee un teorema se adivina la mano del autor tal como se adivina al pintor cuando se mira su obra.

En tercer lugar, la matemática obliga a la honestidad. Es difícil engañar a otros sin engañarse antes uno mismo, y en matemática esto simplemente no se puede: los desvíos, las falsedades, no encuentran lugar. Existe la posibilidad de error, pero esos errores nos explotan en la cara. La cuenta da lo que da, y si no nos gusta el resultado habrá que reconocer que tiene una existencia propia que escapa a nuestra preferencia y a nuestra voluntad.

En cuarto lugar, la matemática enseña paciencia, tenacidad y la aceptación de los tiempos humanos. Las máquinas son muy rápidas, pero ninguna piensa ni puede generar una idea. Para eso hace falta sopesar alternativas, dejarlas decantar, encontrar un camino, seguirlo y, cuando falle, buscar otro. "Que venga la inspiración no depende de mí. Lo único que puedo hacer es asegurarme de que me encuentre trabajando", decía Pablo Picasso. Lo mismo enseña el hecho de enfrentarse con un buen problema matemático.

Por último, la matemática nos hace humildes. Porque en ella encontramos todos, tarde o temprano, los límites claros de nuestra fuerza y habilidad. Límites que se podrán superar con tiempo, esfuerzo y estudio ¡y esto también es formativo! Pero siempre para encontrar, más allá, nuestros nuevos límites.

Discursos razonados, reglas claras sin excepción, libertad dentro de la ley, creatividad, honestidad, paciencia y humildad no son cosas que nos estén sobrando hoy a los argentinos. Así, llega la respuesta a la primera pregunta: "Esto te va a servir para ser más humano, mejor ciudadano y mejor persona.

Por último, queremos expresar nuestro reconocimiento a las Dras. en Ciencias Matemáticas, María Inés Gareis y Marina Roldán, por compartir con nuestra cátedra el material didáctico “Preliminares de matemática”. El mismo es la principal fuente de este compilado. Otra fuente de situaciones problemáticas fue elaborada especialmente para estudiantes de la carrera de Medicina Veterinaria por la Ing. Sandra Cura, ex docente de esta cátedra. A ellas, muchas gracias.

ÍNDICE

Índice de abreviaturas y símbolos:

$\overrightarrow{\ }$: vector

$log\ log$: logaritmo.

$<$: menor.

$\neq$: distinto.

$>$: mayor.

$\in$: perteneciente.

$\leq$: menor o igual.

$\geq$: mayor o igual.

°: grados.

∞: infinito.

CGS: centímetro, gramo, segundo.

cos: coseno.

e: exponencial.

f: función.

I: números irracionales.

I_f: conjunto imagen, rango o recorrido.

MCD: máximo común divisor.

MKS: metro, kilogramo, segundo.

N: números naturales.

O: centro.

Q: números racionales.

R: números reales.

r: radio.

SI: sistema internacional.

sin: seno.

tan: tangente.

Z: números enteros.

CAPITULO 1: Conjuntos numéricos

Números naturales (N)

Los números naturales son, tal como los conocemos, 1, 2, 3, 4, 5, ... Llamamos N al conjunto de los números naturales, es decir: N = {1, 2, 3, 4, ...}. Estos números se usan a diario para contar. Matemáticamente, contar significa decir cuántos elementos tiene un conjunto. Por ejemplo, el conjunto {a, b, c, d} tiene 4 elementos. ¿Cuántos elementos tiene un conjunto vacío? Como un conjunto vacío no posee ningún elemento, necesitamos un símbolo nuevo que represente la cantidad de elementos de este conjunto. Este símbolo es el 0. Llamamos N0 al conjunto de los números naturales con el cero, o sea: N0 = {0, 1, 2, 3, 4...}.

Operaciones en el conjunto de los números naturales (N)

El conjunto de los números naturales tiene dos operaciones importantes: suma y producto. La suma y el producto de números naturales verifican las siguientes propiedades.

Propiedades de la suma: Sean a, b, c $\in$ N.

1. Propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$

Propiedades del producto: Sean a, b, c $\in$ N.

1. Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
3. El 1 es el elemento neutro para el producto, es decir: $1.a = a.1 = a$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: Las operaciones de suma y producto están relacionadas por: $a\,(b + c) = ab + ac$. Notemos que la suma no tiene elemento neutro en N, aunque si en N_0: el 0, ya que

$a + 0 = 0 + a$.

Ejemplo: Veamos cómo se pueden usar estas propiedades para calcular, por ejemplo, el cuadrado de la suma de dos números naturales:

$\boldsymbol{(a + b)^2 =}$

$= (a + b)\,.\,(a + b)$ Propiedad distributiva

$= (a + b)\,a + (a + b)\,b$ Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$= a.a + ba + ab + b.b$

$= a^2 + ab + ab + b^2$ Propiedad conmutativa del producto

$= a^2 + 2ab + b^2$ Propiedad asociativa

De esto se deduce la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ la que resulta de gran utilidad al momento de calcular el cuadrado de un binomio.

Números enteros (Z)

Las operaciones y sus propiedades.

Para continuar con el estudio de los números, consideremos N_0 el conjunto de los números naturales y el cero, y pensemos lo siguiente: sabemos que dos números naturales se pueden sumar y se obtiene como resultado otro número natural; también se pueden multiplicar y el resultado es un número natural. Por ejemplo,

$13 + 15 = 28$ (N) y $13 \cdot 15 = 195$ (N). Además, si quisiéramos restar uno de otro, por ejemplo, hacer $15 - 3$ también se puede dentro del conjunto N, es decir $15 - 3 = 12$ (N).

Una situación cotidiana que refleja esta situación matemática es la siguiente: si Matías tiene 16 figuritas, Pablo le puede pedir prestadas 12 y a Matías a´un le quedan 4. En cambio, si Matías tuviera sólo 10 figuritas, Pablo no debería esperar que le preste 12 porque no tiene más de 10. Es decir, ¿qué ocurre si queremos efectuar la operación de resta en el otro sentido, o sea, $10 - 12$? ¿A 10 se le puede sacar 12? Veremos enseguida que, en realidad, sí se puede efectuar esta operación, pero el resultado ya no es un número natural. Recordemos que la operación suma dentro de N_0 tiene al cero como elemento neutro porque $a + 0 = a$ y $0 + a = a$ para todo número natural a. Pero ningún número natural tiene un inverso respecto de la suma (con inverso de *a* nos referimos a otro número o elemento *b* tal que $a+b = 0$). La pregunta es qué tipo de números deberíamos agregarle a N_0 para que todo elemento tenga inverso respecto de la operación suma. En nuestro ejemplo, si Matías tuviera 10 figuritas, Pablo podría pedirle las 10 y en este caso, Matías no se quedaría con ninguna. Es decir, $10-10 = 0$, o mejor dicho, $10 + (-10) = 0$ que no es un natural pero sí pertenece a N_0. Agreguémosle entonces a N_0 todos los opuestos aditivos de sus elementos: el -1, el -2, etcétera. Llamaremos al nuevo conjunto que construimos de esta forma, conjunto de los números enteros y lo denotamos con la letra Z. A partir de la construcción anterior: $Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ y como vemos, contiene a N y a N_0. Así dentro de los números enteros, cualquier Z tiene un inverso respecto de la suma al que llamaremos su opuesto. Veamos entonces que la pregunta anterior tiene respuesta dentro de Z, pues ahora podemos realizar la resta o diferencia de cualquier par de números enteros, por ejemplo, en nuestro caso particular $10 - 12$ que será calculado como $10 - 12 = 10 + (-12) = -2$. Es decir, si Matías tuviera diez figuritas, le faltarían dos para poder prestarle 12 a su amigo. Luego como vemos en el ejemplo la conocida diferencia entre 10 y 12 resulta de hacer la operación suma entre 10 y el opuesto aditivo de 12.

Ejemplo. Pitágoras, filósofo y matemático griego, nació aproximadamente en el año 582 a.C. y vivió 75 años; ¿en qué año murió? Si Pitágoras nació en el año 582 a.C., es decir, 582 años antes del año cero, y vivió 75 años, entonces murió 75 años más tarde de su año de nacimiento, es decir que murió en el año 507 a.C. y la respuesta es fácilmente calculada haciendo el siguiente cálculo: $-582 + 75 = -507$.

Ampliado el conjunto de los números naturales a este nuevo conjunto numérico, debemos redefinir la operación suma para poder realizarla ahora entre dos números enteros. La suma se realizará fácilmente de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si ambos números tienen igual signo entonces simplemente se suman (considerando los valores sin signo, realizamos la suma natural conocida) y el resultado llevará el signo que tienen los elementos que intervienen en la operación.
- Si los números tienen distinto signo se efectúa la diferencia entre ellos (considerando los números sin signo hacemos la diferencia del elemento mayor menos el menor) y el resultado llevará el signo del elemento mayor.

Además, en el conjunto de los números enteros podemos sumar y restar sin salir de él. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo

$572 + 396 = 968$ $\qquad$ $-572 - 396 = -968$

$572 - 396 = 176$ $\qquad$ $396 - 572 = -176$

Producto de números enteros

El ingrediente nuevo que aparece al multiplicar números enteros es el signo: ¿cómo calculamos $3 \cdot (-2)$? Así como para los números naturales el producto $3 \cdot 2$ significa sumar dos veces 3, que es $3 + 3 = 6$, el producto $3 \cdot (-2)$ significa restar dos veces 3, o sea: $-3-3 = -6$. De aquí surge la conocida regla de que para multiplicar un número positivo por otro negativo: el resultado es un número negativo. ¿Cómo calculamos $(-3) \cdot (-2)$? En este caso, debemos restar dos veces -3, o sea: $-(-3) - (-3) = 6$. De esta manera deducimos que el producto de dos números negativos es un número positivo. Para multiplicar números con signo hay que respetar entonces las siguientes reglas:

- El producto de números de igual signo dará por resultado un número positivo:

+	.	+	=	+
-	.	-	=	+

- El producto de números de distinto signo dará como resultado un número negativo:

+	.	-	=	-
-	.	+	=	-

Propiedades en Z

Las operaciones de suma y producto de números enteros son cerradas en Z, esto significa que dan por resultado otro número entero. Además, dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Sean a, b, c, ∈ Z:

1. Asociativa de la suma: *(a + b) + c = a + (b + c)*
2. Conmutativa de la suma: *a + b = b + a*
3. Existe 0 ∈ Z tal que para todo a ∈ Z se verifica: *a + 0 = 0 + a = a*
4. Para cada a ∈ Z, existe un único elemento al que llamaremos −a ∈ Z tal que *a + (−a) = 0*
5. Asociativa del producto: *(a · b) · c = a · (b · c)*
6. Conmutativa del producto: *a · b = b · a*
7. Existe 1 ∈ Z tal que para todo a ∈ Z se verifica: *a · 1 = 1 · a = a*
8. Distributiva del producto respecto de la suma: *(a + b) · c = a · c + b · c*

Ejemplo. Resolvamos el siguiente cálculo combinado, utilizando las propiedades vistas anteriormente:

$$(-3) \cdot (-15 + 12 \cdot 5) + 9 =$$

Solución: Para resolver cualquier cálculo combinado primero debemos separar el mismo en términos. A continuación, se resuelven los paréntesis, corchetes y llaves, en caso de existir, comenzando por los productos, luego las sumas, y acorde a las reglas vistas en cada caso. Finalmente resolvemos las multiplicaciones y luego las sumas según los resultados obtenidos.

$$\overbrace{(-3) \cdot (-15 + 12 \cdot 5)} + \overbrace{9} =$$

$$= (-3) \cdot \underbrace{(-15 + 60)} + 9$$

$$= \underbrace{(-3) \cdot 45} + 9 =$$

$$= -135 + 9$$

$$= -126$$

Divisibilidad y algoritmo de la división

Imaginemos que tenemos una tableta de chocolate de seis cuadraditos que dos amigos quieren compartir por igual. Esta operación puede realizarse convenientemente, y a cada uno le tocan tres de las seis partes que tiene la tableta. Ahora, imaginemos que tenemos 7 lapiceras que queremos repartir entre los dos amigos. Es claro que, para que a cada amigo le toque la misma cantidad, podemos darle tres lapiceras a cada uno, pero sobra una lapicera, es decir, la lapicera sobrante no puede partirse. La división es la operación que permite averiguar cuántas veces un número, el divisor, está contenido en otro número, el dividendo. Por ejemplo, el 2 está 3 veces en el 6, porque 3 · 2 = 6, entonces 6 dividido 2 es igual a 3. En este sentido, la división es la operación inversa de la multiplicación. Se denomina cociente al resultado entero de la división. Si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto. En el caso de las lapiceras, si se divide 7 por 2 se obtiene un cociente de 3 unidades y un resto de 1 unidad, lo que también puede expresarse como: 7 = 3 · 2 + 1.

Definición: Si *a, b* ∈ Z, *a ≠ 0*, decimos que *a* divide a *b* si existe *q* ∈ Z tal que *b = q· a*, donde *q* es el cociente de la división de *b* por *a*. Para expresar simbólicamente este hecho, se escribe *a|b*. También se dice que *b* es divisible por *a*, o que *a* es un divisor de *b*.

Algoritmo de división

Para efectuar la división de un número natural por otro y obtener la expresión:

dividendo = cociente . divisor + resto

El procedimiento es el que aprendimos en la escuela primaria. Por ejemplo: para el dividendo 4712 y divisor 23 tenemos:

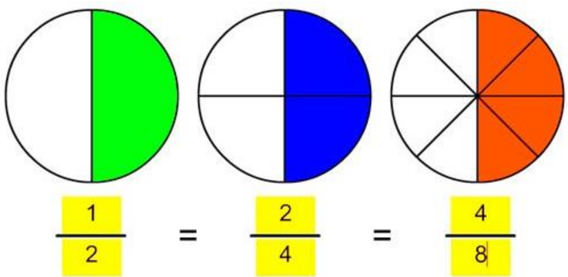
$$\begin{array}{r|l}
4712 & 23 \\ \cline{2-2}
\underline{46} & 204 \\
11 & \\
\underline{00} & \\
112 & \\
20 &
\end{array}$$

El algoritmo de división exige que el resto sea siempre no negativo, es decir, positivo o cero.

Ejemplo: 2 divide a 2 (en efecto, existe 1 ∈ Z tal que 2 = 1. 2). También 2 divide a 4, a 6, a 8, a 20, y a todos los números pares. Justamente, un número es par si es divisible por 2, es decir, el resto de dividir a un número par por 2 es cero.

Números Racionales (Q).

Como el conjunto de números naturales tiene dos operaciones importantes, podemos tratar de agregar inversos para el producto. No hay manera de construir un conjunto que contenga los enteros y en el cual, cada número tenga inverso multiplicativo y aquel número debe ser no nulo pues *0.b = 0* para todo valor de *b*. Tratemos entonces de agrandar el conjunto de números enteros de manera tal que en el conjunto construido todos los números enteros, salvo el cero, tengan inverso multiplicativo. La manera intuitiva de hacerlo es considerar fracciones, esto es cocientes de la forma $\frac{n}{d}$ donde *n* y *d* son enteros y *d* no es cero. En tal expresión, al número *n* se lo llaman numerador y al número *d* se lo llama denominador de la fracción. Tenemos una buena interpretación de las fracciones, la fracción $\frac{1}{d}$ representa tomar el elemento unidad *1*, partirlo en *d* pedazos iguales y tomar uno de esos pedazos. Siguiendo la definición de los números naturales, si *n* es positivo, la fracción $\frac{n}{d}$ representa tomar *n* veces la fracción $\frac{1}{d}$. Si nos detenemos a jugar con las fracciones, vemos que hay un problema en la definición que dimos. La fracción $\frac{1}{2}$ representa tomar la mitad de la unidad, y la fracción $\frac{3}{6}$ representa tomar tres veces la sexta parte de la unidad. Facciones distintas representan la misma cantidad, como en la figura siguiente.



Dentro de todas las fracciones que representan el mismo número, hay una que se destaca sobre las otras y a la cual llamaremos irreducible.

Definición: La fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si *b* es positivo y Máximo Común Divisor (*MCD) entre a y b es 1*. Recordemos que *MCD (a; b)* representa el divisor común mayor de ambos números.

Proposiciones:

- Toda fracción es equivalente a una única fracción irreducible.
- Si $\frac{a}{b}$ es irreducible y $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$, entonces *c* y *d* son un múltiplo entero de *a* y de *b*, es decir que hay un número entero *m* tal que *c = am* y *d = bm*. Observación: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones, para que sean equivalentes, por la propiedad citada arriba, el numerador y el denominador de una de ellas deben ser múltiplos de los de la otra. De aquí podemos deducir que: si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes entonces $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$ pues a denominadores iguales su numerador

también debe coincidir. Luego, dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalente si verifican que *ad = cb.*

Las operaciones y sus propiedades.

Cuando extendimos los números naturales para obtener un conjunto en el que (además de los naturales) cada elemento tenga un opuesto aditivo, lo hicimos de manera tal que se mantengan las operaciones inducidas en N de suma y producto y sus propiedades. Análogamente, si extendemos el conjunto Z a un nuevo conjunto numérico Q para que cada entero no nulo tenga un inverso multiplicativo, debemos definir nuevamente las operaciones suma y producto de tal manera que aplicadas a números enteros los resultados no varíen y además se mantengan las propiedades antes válidas. Definimos entonces al producto de dos fracciones como $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Notemos que si a, b ∈ Z entonces: $\frac{a}{1}\frac{b}{1} = \frac{ab}{1.1}$

Definición: dada dos fracciones, $\frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}$, podemos definir la suma como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Notemos que si a, b, ∈ Z, entonces: $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a1+1b}{1\,.1} = a + b$

Ejemplo numérico:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3{,}1 + 2{,}2}{2{,}3} = \frac{3 + 4}{6} = \frac{7}{6}$$

Propiedades de la suma y el producto de números racionales

Sean $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\ y\ \frac{e}{f}$ ∈ Q

1. Asociativa de la suma: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

2. Conmutativa de la suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

3. Existe 0 ∈ Q tal que para todo a/b número Q se verifica: $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

4. Para cada $\frac{a}{b}$ ∈ Q, existe un elemento al que llamaremos $\frac{-a}{b}$ ∈ Q, tal que:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

Ejemplo numérico:

$$\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

5. Asociativa del producto: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

6. Conmutativa del producto: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

7. Existe 1 ∈ Q tal que para todo $\frac{a}{b}$ ∈ Q se verifica: $\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

8. Para cada $\frac{a}{b}$ ∈ Q, no nulo, existe un único elemento al que llamaremos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\in \text{Q tal que } \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

   Ejemplo numérico:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{1}=2 \text{ Tal que } \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1\right)$$

9. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

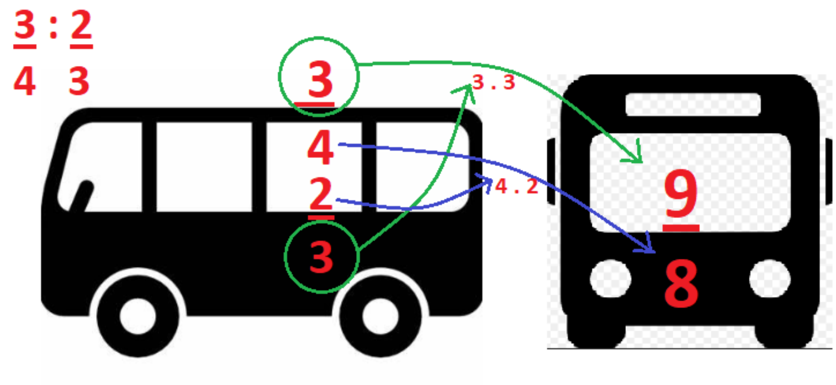
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$$

<u>División de fracciones</u>

Para dividir fracciones, debemos multiplicar en forma de "cruz" los numeradores y denominadores. Si dividimos dos fracciones $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=$ se deben multiplicar el primero numerador con el segundo denominador, obteniendo así el numerador de la fracción resultado; y el primer denominador con el segundo numerador obteniendo así el denominador del resultado, es decir $\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$

$$\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{9}{8}$$

El profesor *Miguel Barbará*, propone les propone, como una regla para ayudar a su entendimiento, la "Ley del colectivo": nos imaginamos que es un colectivo que está llegando a la parada, los números que "están afuera" o "esperando en la parada", se tiene que multiplicar para "subir". Y los números que "están adentro" del colectivo, se tienen que multiplicar para "bajar". (siguiendo con el ejemplo anterior)



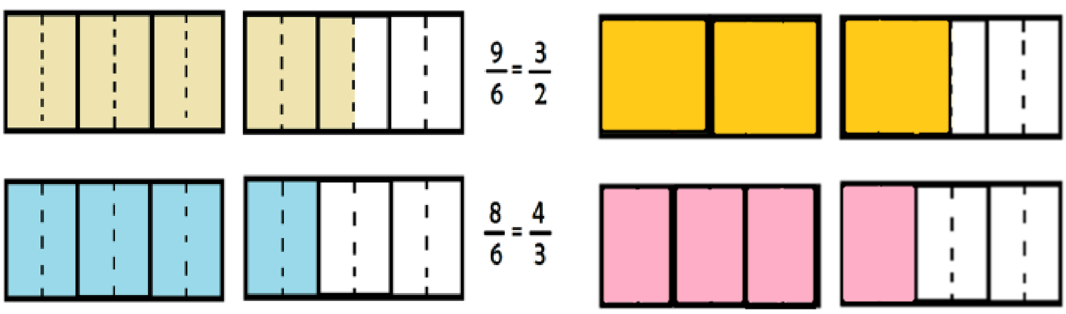
Orden en los números racionales

La forma de comparar números racionales expresados como fracción es buscar fracciones equivalentes con igual denominador y comparar los numeradores. Veamos un ejemplo: Ordenar en forma creciente las fracciones $\frac{3}{2};\frac{4}{3}$

Solución: Para comenzar busquemos fracciones equivalentes con igual denominador. Consideraremos como denominador común a ambas el múltiplo común menor, que resulta en este caso ser 2 . 3 = 6 entonces las fracciones equivalentes a las dadas, pero con igual denominador, serán: $\frac{3\,.3}{2\,.3}=\frac{9}{6}$ $\quad \frac{4\,.2}{3\,.2}=\frac{8}{6}$. Y como tomar 9 unidades de 6 es más grande que tomar 8 de 6, entonces resulta que:

$$\frac{8}{6}<\frac{9}{6}\ es\ decir, \frac{4}{3}<\frac{3}{2}$$

Generalicemos entonces estos resultados.



Definición: sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d} \in$ Q, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ sí y sólo si $\frac{ad}{bd}<\frac{cb}{db}$, lo cual ocurre si $\frac{a}{d}<\frac{c}{b}$ donde:

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \leftrightarrow ad<cb$$

Ejemplo. Ordenar en forma creciente las fracciones $\frac{11}{10};\frac{9}{8};\frac{5}{4}$

Solución: Para ello consideremos fracciones equivalentes a las dadas, pero con denominador común e igual a 40, por ser 40 el múltiplo común más pequeño entre 10; 4 y 8.

$$\frac{11\,.\,4}{10\,.\,4}=\frac{44}{40}\qquad \frac{9\,.\,5}{8\,.\,5}=\frac{45}{40}\qquad \frac{5\,.\,10}{4\,.\,10}=\frac{50}{40}$$

y como vemos fácilmente en las fracciones equivalentes obtenidas, resulta:

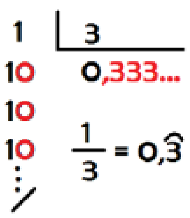
$$\frac{44}{40}<\frac{45}{40}<\frac{50}{40}\ \text{de donde}\ \frac{11}{10}<\frac{9}{8}<\frac{5}{4}$$

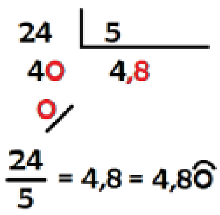
<u>Representación decimal de los números racionales</u>

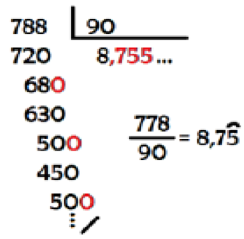
Otra de las maneras conocidas de representar los números racionales es a partir de su desarrollo decimal. Al estudiar los números enteros vimos que los podemos representar como una tira finita de números del 0 al 9. Los números racionales tienen una representación parecida pero la tira no tiene que ser necesariamente finita, aunque sí debe tener cierto periodo. Esto es, los números racionales pueden ser representados por una tira infinita de dígitos que a partir de cierto lugar comienzan a repetirse indefinidamente. Claramente ambas representaciones son equivalentes y por tanto dada una fracción podemos encontrar la expresión decimal que representa, y al revés, dado el desarrollo decimal de un número racional podemos hallar una fracción equivalente a tal desarrollo.

<u>Paso de fracción a expresión decimal</u>

Para poder hallar el desarrollo decimal de un número racional dado en forma de fracción simplemente debemos realizar la división del numerador por el denominador como se muestra a continuación:







<u>Paso de expresión decimal a fracción</u>

Para pasar de la expresión decimal a fracción se realiza de la siguiente manera. En primer lugar, debemos identificar si el número tiene o no período cero y en función de eso evaluaremos los dos casos siguientes:

- Si el número racional tiene en su desarrollo decimal periodo cero entonces una fracción equivalente a este número racional se encontrará tomando como numerador el número dado (considerado como número entero, es decir sin coma) y como denominador un 1 y tantos 0 como números haya en la parte decimal. Por ejemplo: $0{,}953=\frac{953}{1000}$ $\quad 12{,}578=\frac{12578}{1000}=\frac{6289}{500}$

Observación. Dos expresiones decimales distintas pueden ser el desarrollo decimal del mismo número real.

Números Reales (R).

Números Irracionales

Podríamos decir que la mayor parte de los científicos de la historia (si no todos), ya sean matemáticos, físicos, químicos, biólogos o de cualquier otra rama, han soñado o sueñan con realizar un descubrimiento brillante, que rompa los esquemas de la ciencia de su tiempo. Pero también es cierto que cuando esto ocurre la situación no suele ser del todo cómoda para la persona en cuestión.

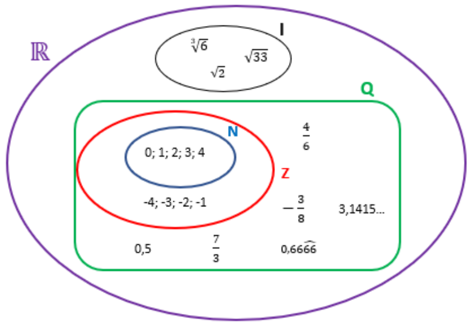
La historia que vamos a contar se desarrolla en torno al siglo V a.C. en la antigua Grecia y los protagonistas son los pitagóricos, aunque el protagonista principal es, por razones que veremos más adelante: Hipaso de Metaponto. Los pitagóricos tenían la firme creencia de que todo el Universo podía ser explicado con números racionales. Según cuenta la leyenda, Hipaso fue el culpable de mostrar que eso no podía ser real. Al parecer Hipaso se planteó el problema de medir la diagonal de un cuadrado de lado 1. Teniendo en cuenta la condición de pitagórico de Hipaso, es posible que él mismo esperara que la medida de esta diagonal pudiera expresarse como un número natural o una fracción. . . pero en realidad no fue así. Hipaso se dio cuenta de que esta medida no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción formada por números naturales. Ahora sabemos que esta diagonal mide $\sqrt{2}$, y que es un número de los conocidos como irracionales. Cuando el propio Hipaso comunicó este descubrimiento los pitagóricos lo arrojaron al mar por revelar fuera de la secta esta catástrofe pitagórica. Todo parece indicar que la raíz de la muerte de Hipaso fue exactamente la raíz de dos.

Veamos el razonamiento de este matemático que lo determinó a pensar que efectivamente $\sqrt[2]{2}$ no puede expresarse como un cociente de dos enteros. Supongamos erróneamente que existe un número racional, digamos x, tal que $x = \sqrt{2}$. Dado que *x* es una fracción (y tomemos a ésta su expresión irreducible) existirán números enteros *p y q* tales que: $x = \frac{p}{q} = \sqrt{2}$. De esta igualdad deducimos que: $x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$. Y despejando de esta última igualdad resulta que $p^2 = 2q^2$, lo que nos indica que p^2, y por lo tanto p, son ambos números pares. Dado que *p* es par, podrá escribirse como $p = 2k$ para algún número entero k. De $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$, resulta que $q^2 = 2k^2$, esto nos indica que también q es un número par. Como conclusión vemos que tanto p como q son números pares, esto indica que la fracción $\frac{p}{q}$ no puede ser irreducible ya que tanto su numerador como su denominador son divisibles por dos. He aquí el absurdo que acabó con la vida de Hipaso.

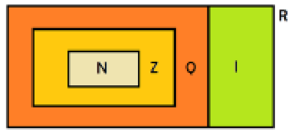
Claramente lo anterior nos indica que los números racionales no completan el total de números que necesitamos para trabajar, una vez más debemos ampliar el conjunto numérico si queremos medir cualquier distancia. Notemos que, como lo mencionamos anteriormente, los números racionales (que incluyen a los números enteros y por tanto a los naturales también) son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales que se repiten con cierto periodo, como ya lo adelantamos, esos no son todos los números que conocemos, por ejemplo, que ocurre con números como

$$0,\ 1011001110001111 0000 \cdot \cdot$$

Esta expresión decimal es no periódica y por tanto no es un número racional, al igual que nos ocurrió con $\sqrt{2}$. Al conjunto de números cuya expresión decimal posee infinitas cifras no periódicas lo llamaremos conjunto de los números Irracionales y lo simbolizaremos por **I**. La suma y producto de números irracionales puede ser racional o irracional. El conjunto de los números reales, representados por R, es el conjunto de todos los números vistos hasta aquí, para visualizarlo podemos describirlo en las siguientes maneras:



ℝ:números reales
N: números naturales (enteros positivos)
Z: números enteros (positivos y negativos)
Q: números racionales (fracciones y decimales)
I: números irracionales



Las operaciones y propiedades

Las operaciones de suma y producto de números reales son cerradas en R, esto significa que dan por resultado otro número real. Además, dichas operaciones verifican las siguientes propiedades.

Sean a, b, c ∈ R,

1. Asociativa de la suma: *(a + b) + c = a + (b + c)*
2. Conmutativa de la suma: *a + b = b + a*
3. Existe 0 ∈ R tal que para todo a ∈ R se verifica*: a + 0 = 0 + a = a*
4. Para cada a ∈ R, existe un único elemento al que llamaremos −a ∈ R tal que *a + (−a) = 0*
5. Asociativa del producto: *(a · b) · c = a · (b · c)*
6. Conmutativa del producto: *a · b = b · a*
7. Existe 1 ∈ R tal que para todo a ∈ R se verifica*: a · 1 = 1 · a = a*
8. Para cada a ∈ R, no nulo, existe un único elemento al que llamaremos a −1 ∈ R tal que *a · a −1 = 1*
9. Distributiva del Producto respecto de la Suma:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Por cumplir las anteriores propiedades diremos que R tiene estructura de cuerpo. Además de las anteriores, algunas otras propiedades que se verifican en R, y que nos serán de utilidad, son las siguientes:

10. *a + b = a + c ⇒ b = c*
11. *a0 = 0a = 0*
12. *ab = 0 ⇒ a = 0 o b = 0*
13. *Si a 6= 0 y ab = ac entonces b = c.*

¡EXTRA! El dado de 10 caras.

Los números reales (R) son más que los racionales (Q) … ¿Qué quiere decir? Que el infinito de los números reales es más grande que el de lo racionales. ¿Raro no? Veamos eso…

Recordamos que los números racionales son los que resultan de obtener el cociente de dos números, por ejemplo: 1/2, 7/3, 2/5, 123/1000

Son todos números racionales. Estos números también pueden escribirse con su desarrollo decimal (haciendo la división). Entonces se tiene:

1/2: 0,5
2/5: 0,4
7/3: 2,33333
123/1000: 0,123

Entonces vemos que los números racionales tienen un desarrollo decimal que termina, es decir, en algún momento todos los decimales que aparecen son 0:

1/2: 0,5000000
2/5: 0,4000000

O bien es periódico:

7/3: 2,333333
83/99: 0,83838383

Quedan entonces los números que tienen un desarrollo decimal que nunca termina y que NO son periódicos, por ejemplo $\sqrt{2}$ o π.

¿Como podemos convencernos de esto?
Fabriquemos un dado, pero que en lugar de 6 caras como los convencionales, tiene 10 caras. En cada cara ponemos in digito distinto: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vamos a usar este dado para fabricar un numero que voy a llamar A y vamos a suponer que es mayor que 0 y menor que 1. Va a empezar: 0,… ¿Se entiende? Pensémoslo con tranquilidad. Cualquier número que sea mayor que 0 pero menor que 1 va a empezar de esa forma.
Ahora para construir el numero A vamos a tirar el dado y anotar los resultados que obtenemos, poniéndolos del lado derecho e la coma. Por ejemplo, si sacamos 7, 5, 0, 8, 3, el número real que estamos construyendo nos queda: 0,7683…

Si seguimos tirando el dado, agregamos más decimales al número. ¿Ahora bien, nos hacemos una pregunta… para que A sea un numero racional que tiene que pasar? (Si no podés contestarla, volvé a leer este extra que ahí está la clave).

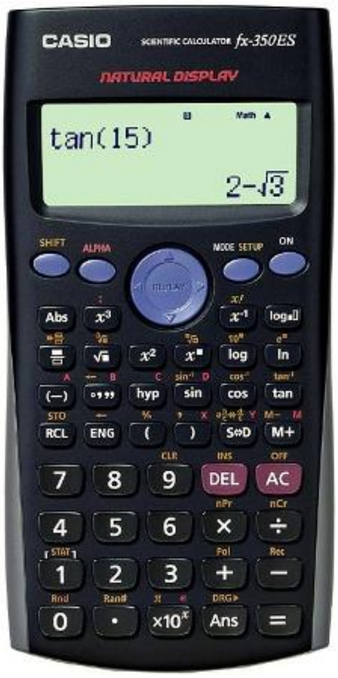
¡Bueno ya recordaras que para que A sea un numero racional tiene que terminar en 0 o ser periódico! Entonces lo que tendría que pasar es que a partir de un momento al tirar el dado comiencen a salir todos ceros infinitamente o comience a repetirse un grupo de números constantemente infinitamente.

Ya se darán cuenta de que las probabilidades de que eso ocurra son muy bajas y en efecto podemos darnos cuenta de que los números irracionales o reales R son muchos más que los racionales Q.

CAPÍTULO 2: Uso de la calculadora

Consideramos importante comprender la importancia de la calculadora científica como herramienta básica para la resolución de ejercicios matemáticos, como también entender las funciones de la calculadora para resolver problemas de manera correcta.

La calculadora científica



Recordatorio teclas de la calculadora

✓ *Teclas de encendido y apagado*

ON /AC Enciende la calculadora, aparece un cero en la pantalla 0

OFF Apaga la calculadora, borra todos los registros menos la memoria.

✓ *Borrar registros*

C Borra solo el último número que hemos introducido, pero no la operación memoria.

AC Borra todos los registros poniendo la calculadora en cero, aunque normalmente no borra la memoria.

← ▶ Si se ha introducido un número, borra el ultimo dígito tecleado.

✓ *Operaciones Básicas*

Se utilizan con las teclas: + − × ÷

✓ *Posiciones de las teclas*

Observamos la posición de las teclas numéricas de la calculadora

7	8	9
4	5	6
1	2	3
0		

✓ *<u>Verificar si es o no jerárquica la calculadora.</u>*

Al encender la calculadora debemos verificar si es o no jerárquica, para saber si mantiene o no el orden de prioridad de las operaciones matemáticas. Se realiza una comprobación.

Tecleamos, por ejemplo: $6 + 3 * 2 =$ $\begin{cases} 18 \\ 12 \end{cases}$

El resultado correcto es 12. Si ese es el número que nos devuelve la calculadora, entonces es jerárquica, si nos da 18 significa que no respeta la prioridad de operaciones, si no que va resolviéndolas a medida que las vamos introduciendo. (en este caso la importancia del uso de paréntesis para separar las operatorias)

$$6 + (3 * 2) = 12$$

✓ *<u>Cambio de signo</u>*

Para cambiar de signo a un número que está en la pantalla:

Por ejemplo, si [+/_] [(−)] escribimos el número 6 y le cambiamos el signo

Tecleamos 6: vemos en pantalla [6]

Luego tecleamos: [+/_] vemos en pantalla [−6]

✓ *<u>Números decimales</u>*

Para escribir números decimales y que se vean en la pantalla, debemos utilizar la

[8] [.] [3] [2] [1] [=] [8,321]

Puede ocurrir que algunas calculadoras tengan como separador de miles la coma (,)

[,] Y como separar de decimales el punto. Por ello es importante estudiar bien como nos muestra la información nuestra calculadora.

El punto o la coma en la unidad de mil

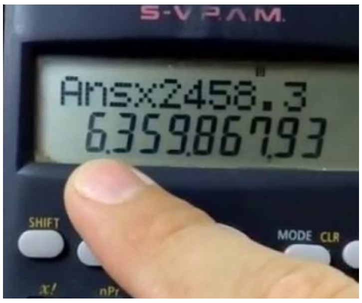
En las calculadoras cuando se escribe el número mil aparece una separación entre el uno y los tres ceros restantes (“separador de millares”) que, dependiendo del sistema que posee esa calculadora, puede ser un punto o una coma, esta última en la parte superior o inferior.
Los países que utilizan la coma decimal emplean un punto como separador de millares, mientras que los países que utilizan el punto decimal emplean una coma como separador de millares.

1.000,00

Separador de millares

Separador decimal

1,000.00



- *Uso de Paréntesis:*

Los paréntesis s e introducen con las teclas (para abrir paréntesis y

) para cerrar paréntesis.

- *Cálculo de Potencia*

La calculadora científica nos permite calcular potencias para ello debemos utilizar las teclas

x^2 O x^y

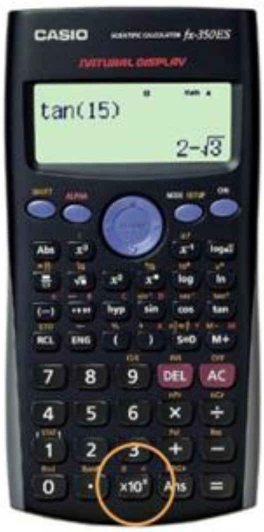
Por ejemplo, para calcular el cuadrado de 6

Presiono las teclas 6, luego x^2

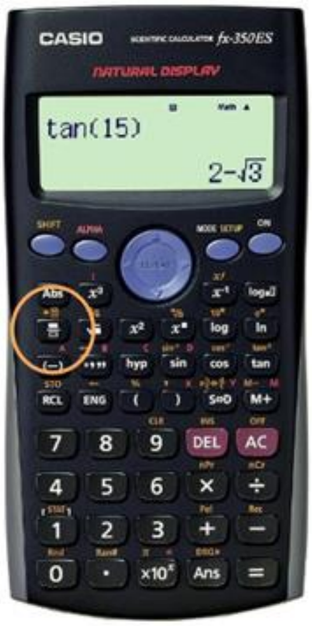
y el resultado en el visor de pantalla será **36**

Algunas imágenes de calculadoras

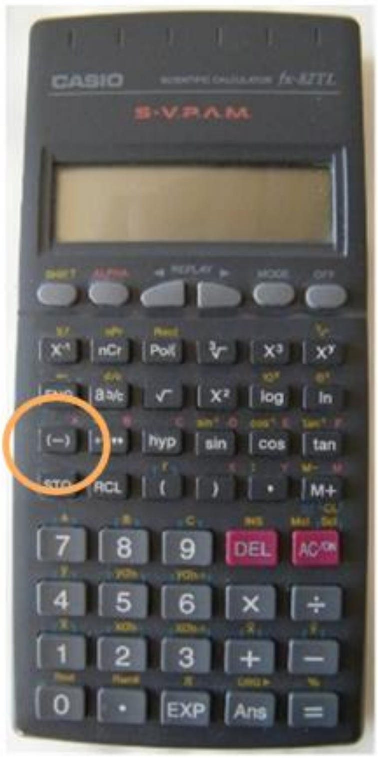
Función exponencial



Expresión fraccionaria



Asignar valor negativo a un numero



<u>Uso de paréntesis</u>

Si debo calcular, por ejemplo
325,5 . 10^5 presiono las teclas:

$\boxed{3}$; $\boxed{2}$; $\boxed{5}$; $\boxed{.}$; $\boxed{5}$; $\boxed{EXP}$ o $\boxed{X10^X}$; $\boxed{5}$; $\boxed{=}$

Si debo calcular, por ejemplo
0,174 . 10^{-2} presiono las teclas:

$\boxed{0}$; $\boxed{.}$; $\boxed{1}$; $\boxed{7}$; $\boxed{4}$; $\boxed{EXP}$ o $\boxed{X10^X}$; $\boxed{(-)}$; o $\boxed{(+/-)}$; $\boxed{2}$; $\boxed{=}$

CAPÍTULO 3: Potenciación – Radicación

Potenciación:

La potenciación es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales *5.5.5.5 = 5⁴*

Llamamos *Base de una potencia* al número que multiplicamos por sí mismo, en este caso el 5.

Llamamos *Exponente de una potencial* al número que indica cuantas veces multiplicamos la base, en este caso 4.

5^{4} → Exponente
→ base

Debe multiplicarse la base tantas veces como lo indica el exponente:

$$5^4 = 5.5.5.5$$

$$5^n = \underbrace{5\,.\,5.\,5......}_{n \quad \text{veces}}$$

Debemos conocer ciertas *propiedades de potenciación*

1) SUMA: La potenciación *no es distributiva* con respecto a la *suma*
$(A+B)^n \quad A^n + B^n$ Lo correcto es: $(5+3)^2 = 8^2 = 64$

2) RESTA: La potenciación *no es distributiva* con respecto a la *resta*

$$(A-B)^n \quad A^n - B^n$$

3) POTENCIA DE UN PRODUCTO: La potenciación *es distributiva* con respecto al *producto*

$(A.B)^n = A^n.B^n$ EJ: $(2\,.3)^2 = 2^2.3^2 = 4\,.9 = 36$ ó 6^2

4) POTENCIA DE UN COCIENTE: La potenciación *es distributiva* con respecto al cociente.

$$\left[\frac{A}{B}\right]^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Ej.: $\left[\frac{7}{4}\right]^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$ $3{,}0625$ *o* $1{,}75^2 = 3{,}0625$

5) PRODUCTOS DE POTENCIAS DE IGUAL BASE: Es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es la *suma algebraica* de los exponentes dados:

$$A^x\,.A^y\,.A^z = A^{(x+y+z)}$$

Ej.: $2^2\,.2^{-3}\,.2^4.2^{-1} = 2^{\,2+(-3)+4+(-1)} = 2^2 = 4$

6) COCIENTES DE POTENCIA DE IGUAL BASE: Es igual a otra potencia de igual base cuyo exponente es la diferencia algebraica entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

$$\frac{A^x}{A^y} = A^{x-y}$$

Ej.: $\frac{8^4}{8^6} = 8^{4-6} = 8^{-2} = \left[\frac{1}{8}\right]^2 = \frac{[1]^2}{[8]^2} = \frac{1}{16}$

Recordemos que:

- La potencia con exponente negativo es igual a la inversa de la base elevada a dicha potencia como exponente positivo (como en el ejemplo dado arriba).
- Todo número elevado a la 0 es igual a 1:

Ej.: $5^0 = 1$

7) POTENCIA CON EXPONENTE FRACCIONARIO POSITIVO: Una potencia cuyo exponente es fraccionario positivo, es igual a una raíz cuyo índice es el denominador de la fracción y cuyo numerador es el exponente de la cantidad subradical.

Ej.: $A^{3/2} = \sqrt[2]{A^3}$

8) POTENCIA CON EXPONENTE FRACCIONARIO NEGATIVO:

Ej.: $A^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{A^3}}$

9) POTENCIA DE OTRA POTENCIA: Es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.

Ej.: $(A^2)^3 = A^6$

$$(A^2)^{-1} = A^{-2} = \left(\frac{1}{A}\right)^2$$

10) POTENCIA CON EXPONENTE CERO (0): Todo número elevado a la cero es igual a 1.

$$a^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

11) POTENCIA CON EXPONENTE 1: Todo número elevado a n=1, es igual a sí mismo

$$a^1 = a$$

$$5^1 = 5$$

<u>Operaciones con potencias</u>

Con frecuencia tenemos expresiones donde aparecen combinadas todas las operaciones que hemos estudiado hasta ahora. Para resolverlas correctamente hay que mantener la prioridad de las operaciones:

a) Eliminar paréntesis y corchetes.
b) Efectuar operaciones de potenciación y radicación
c) Realizar las multiplicaciones y las divisiones en el orden que aparecen, de izquierda a derecha.
d) Realizar las sumas y restas en el orden en que aparecen.

Radicación

El resultado de la raíz enésima de un número real, es un número cuya potencia enésima es igual al número dado.

$$\sqrt[n]{A} = B \quad si \quad B^n = A$$

Propiedades:

1) La radicación *no es distributiva* con respecto a la *suma:*

$$\sqrt[n]{A+B} \quad \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \quad ; \text{ lo correcto es } \quad \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$$

2) La radicación *no es distributiva* con respecto a la *resta:*

$$\sqrt[n]{A-B} \quad \sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B} \quad ; \text{ lo correcto es } \quad \sqrt{120-20} = \sqrt{100} = 10$$

3) La radicación *es distributiva* con respecto al *producto:*

$$\sqrt[n]{A.B.C} = \sqrt[n]{A}\,.\sqrt[n]{B}\,.\sqrt[n]{C}$$

4) La radicación *es distributiva* con respecto al *cociente*:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$$

Recordar:

- Cuando el índice de la raíz *es par*, el resultado puede ser tanto negativo como positivo:

Ej.: $\sqrt[2]{4} = \pm 2 \quad pues \quad (-2)^2 = 2^2 = 4$

- Cuando el índice de la raíz *es par* y el radicando *negativo* no tiene solución real:

Ej.: $\sqrt[2]{-5}$ = no tiene solución en los numeros reales

- Cuando el índice de la raíz es *impar* y el radicando *negativo* tiene solución negativa:

Ej.: $\sqrt[3]{-8 = -2} \; pues \; (-2)^3 = -8$

5) la potencia *n* de la raíz *n* de un número real es igual a dicho número

Ej.: $\sqrt[n]{A^n} = A$

6) *Raíz de otra raíz*: se multiplican los índices de las raíces

Ej.: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[6]{A}$

CAPÍTULO 4: Notación Científica

En muchas ciencias se emplean números muy grandes o muy pequeños, que son muy difíciles de escribir y, que, además, es muy delicado trabajar con ellos.

Por ejemplo, el número de Avogadro, que es una constante que expresa el número de moléculas que hay en un mol de cualquier sustancia, es enorme: 602.300.000.000.000.000.000.000, de modo que no resulta práctico escribirlo de esa manera, con tantos ceros.

Para expresar números de muchas cifras y poder simplificar operaciones, se utiliza normalmente la forma de producto de las cifras significativas por una potencia de 10, lo que se denomina *Notación científica*.

- Ej.: 358.000 = 358.000,00

donde la coma se corre 5 lugares hacia la izquierda, quedando la expresión = $3{,}58 \ . \ 10^5$

- Ej.: 0,0000358

donde la coma se corre también 5 lugares hacia la derecha quedando la expresión

= $3{,}58 \ . \ 10^{-5}$

Siempre se deja una cifra significativa (distinta de cero) antes de la coma, y se acompaña el número resultante con un factor de 10 elevado a un exponente igual al número de lugares que se ha corrido la coma. El exponente es positivo si se ha corrido hacia la izquierda, y negativo si fue hacia la derecha.

Si nos referimos a la pantalla de las calculadoras, sabemos que admiten un número limitado de cifras, por ello hay resultados de operaciones que las misma los expresa en notación científica.

Existen muchos contextos donde aparecen números grandes o pequeños. Por ejemplo, el diámetro del Sol es de 1.391.000.000 m y el diámetro de un glóbulo rojo es de 0,000007 m. Para simplificar estas cantidades se suelen utilizar potencias de 10:

$$1.391.000.000 = 1{,}391 \cdot 1.000.000.000 = 1{,}391 \cdot 10^9 \, m$$

$$0{,}000007 = \frac{7}{1.000.000} = 7 \cdot \frac{1}{1.000.000} = 7 \cdot \frac{1}{10^6} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Otros ejemplos de expresiones usuales en notación científica son

- La velocidad de la luz en el vacío: $2{,}99 \ . \ 10^{8}$ metros/segundo
- Cantidad de bacterias en el suelo: $3 \ . \ 10^{12}$ número de bacterias / gramo de suelo
- Cantidad de bacterias en un medio de cultivo: $8 \ . \ 10^{13}$ número de bacterias
- El tamaño de un átomo: $1{,}0 \ . \ 10^{-8}$ cm
- El radio del protón: $8{,}41 \ . \ 10^{-16}$ m
- El tamaño de un virus: $1{,}5 \ . \ 10^{-5}$ mm
- El volumen de agua de una pileta: $1{,}3 \ . \ 10^{15}$ litros

La expresión de un *número en notación científica* consiste en representarlo como el producto de un número entero o decimal con una sola cifra distinta de cero en su parte entera y una potencia de 10. Se relaciona con que, un número muy pequeño al pasar a expresarse en notación científica va a ir acompañado por una potencia de 10 con exponente negativo. Del mismo modo, un número muy grande al expresarse en notación científica, va a ir acompañado de una potencia de 10 con exponente positivo.

CAPÍTULO 5:
Unidades

Ciencias físicas y medida.

Para la física y la química, en su calidad de ciencias experimentales, la medida constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles. Las unidades, como cantidades de referencia a efectos de comparación, forman parte de los resultados de las medidas. Cada dato experimental se acompaña de su error o, al menos, se escriben sus cifras de tal modo que reflejen la precisión de la medida correspondiente.

Se consideran ciencias experimentales aquellas que por sus características y, particularmente por el tipo de problemas de los que se ocupan, pueden someter sus afirmaciones o enunciados al juicio de la experimentación. En un sentido científico la experimentación hace alusión a una observación controlada; en otros términos, experimentar es reproducir en el laboratorio el fenómeno en estudio con la posibilidad de variar a voluntad y de forma precisa las condiciones de observación.

La física y la química constituyen ejemplos de ciencias experimentales. La historia de ambas disciplinas pone de manifiesto que la experimentación ha desempeñado un doble papel en su desarrollo. Con frecuencia, los experimentos científicos sólo pueden ser entendidos en el marco de una teoría que orienta y dirige al investigador sobre qué es lo que hay que buscar y sobre qué hipótesis deberán ser contrastadas experimentalmente. Pero, en ocasiones, los resultados de los experimentos generan información que sirve de base para una elaboración teórica posterior. Este doble papel de la experimentación como juez y guía del trabajo científico se apoya en la realización de medidas que facilitan una descripción de los fenómenos en términos de cantidad. La medida constituye entonces una operación clave en las ciencias experimentales.

Magnitud, Cantidad, Unidad

El gran físico inglés Lord Kelvin consideraba que solamente puede aceptarse como satisfactorio nuestro conocimiento si somos capaces de expresarlo mediante números. Aun cuando la afirmación de Lord Kelvin tomada al pie de la letra supondría la descalificación de valiosas formas de conocimiento, destaca la importancia del conocimiento cuantitativo, particularmente en el tipo de ciencia que él profesaba.

La operación que permite expresar una propiedad o atributo físico en forma numérica es precisamente la medida.

La noción de *magnitud* está inevitablemente relacionada con la de medida. Se denominan magnitudes ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, las magnitudes son propiedades o atributos medibles.

Ejemplos de magnitudes físicas son: la longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia. La belleza, sin embargo, no es una magnitud, entre otras razones porque no es posible elaborar una escala y mucho menos un aparato que permita determinar cuántas veces una persona o un objeto es más bello que otro.

La sinceridad o la amabilidad tampoco lo son. Se trata de aspectos cualitativos porque indican cualidad y no cantidad.

En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud de esta mesa, la masa de aquella moneda, el volumen de ese lapicero, son ejemplos de cantidades.

Una cantidad de referencia se denomina unidad y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.

Sistemas de unidades

¿Qué es un sistema de unidades?

En las ciencias físicas tanto las leyes como las definiciones relacionan matemáticamente entre sí grupos, por lo general amplios, de magnitudes. Por ello es posible seleccionar un conjunto reducido pero completo de ellas de tal modo que cualquier otra magnitud pueda ser expresada en función de dicho conjunto.

Esas pocas magnitudes relacionadas se denominan *magnitudes fundamentales*, mientras que el resto que pueden expresarse en función de las fundamentales reciben el nombre de magnitudes derivadas.

Cuando se ha elegido ese conjunto reducido y completo de magnitudes fundamentales y se han definido correctamente sus unidades correspondientes, se dispone entonces de un sistema de unidades.

La definición de unidades dentro de un sistema se atiene a diferentes criterios. Así la unidad ha de ser constante como corresponde a su función de cantidad de referencia equivalente para las diferentes mediciones, pero también ha de ser reproducible con relativa facilidad en un laboratorio.

Así, por ejemplo, la definición de amperio como unidad de intensidad de corriente ha evolucionado sobre la base de este criterio.

Debido a que las fuerzas se saben medir con bastante precisión y facilidad, en la actualidad se define el amperio a partir de un fenómeno electromagnético en el que aparecen fuerzas entre conductores cuya magnitud depende de la intensidad de corriente.

El Sistema Internacional de Unidades (SI)

Las condiciones de definición de un sistema de unidades permitirían el establecimiento de una considerable variedad de ellos. Así, es posible elegir conjuntos de magnitudes fundamentales diferentes o incluso, aun aceptando el mismo conjunto, elegir y definir unidades distintas de un sistema a otro.

Desde un punto de vista formal, cada científico o cada país podría operar con su propio sistema de unidades, sin embargo, y aunque en el pasado tal situación se ha dado con cierta frecuencia (recuérdense los países anglosajones con sus millas, pies, libras, grados Fahrenheit, etc.), existe una tendencia generalizada a adoptar un mismo sistema de unidades con el fin de facilitar la cooperación y comunicación en el terreno científico y técnico.

En esta línea de acción, la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960, tomó la resolución de adoptar el llamado con anterioridad Sistema Práctico de Unidades, como Sistema Internacional, que es, precisamente, como se le conoce a partir de entonces.

El *Sistema Internacional de Unidades* (abreviadamente SI) distingue y establece, además de las magnitudes básicas y de las magnitudes derivadas, un tercer tipo formado por aquellas que aún no están incluidas en ninguno de los dos anteriores, son denominadas magnitudes suplementarias.

El *SI* toma como *magnitudes fundamentales* la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia, y fija las correspondientes unidades para cada una de ellas.

El sistema internacional.

A lo largo de la historia el hombre ha venido empleando diversos tipos de sistemas de unidades. Estos están íntimamente relacionados con la condición histórica de los pueblos que las crearon, las adaptaron o las impusieron a otras culturas. Su permanencia y extensión en el tiempo lógicamente también ha quedado ligada al destino de esos pueblos y a la aparición de otros sistemas más coherentes y generalizados. El sistema anglosajón de medidas -millas, pies, libras, Grados Fahrenheit- todavía en vigor en determinadas áreas geográficas, es, no obstante, un ejemplo evidente de un sistema de unidades en recesión. Otros sistemas son el cegesimal -centímetro, gramo, segundo-, el terrestre o técnico -metro-kilogramo, fuerza-segundo-, el Giorgi o MKS -metro, kilogramo, segundo- y el sistema métrico decimal, muy extendido en ciencia, industria y comercio, y que constituyó la base de elaboración del Sistema Internacional.

El Sistema Internacional es el sistema práctico de unidades de medidas adoptado por la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en octubre de 1960 en París. Trabaja sobre siete magnitudes fundamentales (longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, intensidad luminosa y cantidad de sustancia) de las que se determinan sus correspondientes unidades fundamentales (metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol). De estas siete unidades se definen las derivadas (coulomb, joule, newton, pascal, volt, ohm, etc.), además de otras suplementarias de estas últimas.

Unidades fundamentales del sistema SI

https://www.bipm.org/en/measurement-units

metro	**m**	Es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299 792 458 de segundo.
kilogramo	**kg**	Es la masa del prototipo internacional de platino iridiado que se conserva en la Oficina de Pesas y Medidas de París.
segundo	**s**	Unidad de tiempo que se define como la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.
ampere	**A**	Es la intensidad de corriente constante que, mantenida en dos conductores rectilíneos, paralelos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a una distancia de un metro el uno del otro, en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por cada metro de longitud.
kelvin	**K**	Unidad de temperatura termodinámica correspondiente a la fracción 1/273, 16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
candela	**cd**	Corresponde a la intensidad luminosa en la dirección perpendicular, de un área de 1/600 000 metros cuadrados de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a una precisión de 101,325 newton por metro cuadrado.
mol	**mol**	Cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 Kg. de carbono 12.

Unidades derivadas

coulomb	**Cb**	Cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un amperio.
joule	**J**	Trabajo producido por una fuerza de un newton cuando su punto de aplicación se desplaza la distancia de un metro en la dirección de la fuerza.
newton	**N**	Es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene una masa de 1 kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo, cada segundo.
pascal	**Pa**	Unidad de presión. Es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.
volt	**V**	Unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz. Es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre esos puntos es igual a 1 watt.
watt	**W**	Potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo.
ohm	Ω	Unidad de resistencia eléctrica. Es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.
weber	**Wb**	Unidad de flujo magnético, flujo de inducción magnética. Es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

Sistemas CGS, MKS y Sistema Técnico:

Magnitud	Sistema c.g.s.	Sistema M.K.S	Sistema TÉCNICO
Longitud	cm	m	m
Masa	g	Kg	$\dfrac{\overrightarrow{kg}}{\frac{m}{s^2}} = UTM$ Unidad Técnica de Masa
Tiempo	s	s	s
Superficie	cm^2	m^2	m^2
Volumen	$cm3$	m^3	m^3
Velocidad $v = e/t$	cm/s	m/s	m/s
Aceleración $a = v/t$	cm/s^2	m/s^2	m/s^2
Fuerza $F = m.a$	$g.\frac{cm}{s^2} = Dyn$ Dina	$Kg\,.\frac{m}{s^2} = N$ Newton	$\overrightarrow{kg}$ Kilogramo fuerza
Trabajo $W = F.e$	$Dyn\,.cm = erg$ Ergio	$N.m = J$ Joule	$\overrightarrow{kg}\,.m = \overrightarrow{kgm}$ kilográmetro

<u>OBSERVACIÓN</u>: LOS QUE APARECEN SOMBREADOS REPRESENTAN unidades de las magnitudes FUNDAMENTALES EN LOS SISTEMAS RESPECTIVOS.

Relación: $1\,\overrightarrow{kg} = 9{,}8\,N$

Unidades de presión:

barias	Pascal	$\frac{\overrightarrow{kg}}{m^2}$	Torr	Atm	mm Hg
$1{,}013.10^6$	$1{,}013\,.\,10^5$	10333	760	1	760

1 Torr = 1 mm Hg

Conversión de unidades:

Ejemplos:

1) Se dispone de un cuerpo sobre el que actúa una fuerza de 15 N; expresar el módulo de la misma en el sistema C.G.S.

Resolución:

$$15\,N = \frac{15\,kg\,.m}{s^2}\,.\frac{1000\,g}{1\,kg}\,.\frac{100\,cm}{1m} = 1{,}5\,.\,10^6\,dyn \quad .$$

2) Dada una fuerza de 25 dyn expresar su módulo en el sistema M.K.S.

Resolución:

$$25\,dyn = \frac{25\,g\,.cm}{s^2}\,.\frac{1\,kg}{1000\,g}\,.\frac{1\,m}{100\,cm} = 2{,}5\,.\,10^{-4}\,N$$

En forma similar siguiendo un mecanismo de razonamiento similar, se pueden realizar los pasajes entre otras unidades compatibles como, por ejemplo, joule y ergios o barias y pascales.

Cifras significativas

Los científicos procuran que sus datos experimentales no digan más de lo que pueden decir según las condiciones de medida en los que fueron obtenidos. Por ello ponen cuidado en el número de cifras con que expresar el resultado de una medida con el propósito de incluir sólo aquellas que tienen algún significado experimental.

Tales cifras reciben el nombre de *cifras significativas.* Una cifra es significativa cuando se conoce con una precisión aceptable. Así, cuando se mide con un termómetro que aprecia hasta las décimas de grado no tiene ningún sentido que se escriban resultados del tipo 36,25ºC o 22,175ºC, por ejemplo.

Todas las cifras que figuran en un resultado deben ser significativas. Este mismo criterio general debe respetarse cuando se opera con datos experimentales; es una cuestión de sentido común que por el simple hecho de operar con los números no es posible mejorar la precisión de los resultados si éstos tienen una base experimental. Cuando un resultado se escribe de modo que todas sus cifras sean significativas proporciona por sí mismo información sobre la precisión de la medida.

Múltiplos y submúltiplos

Es frecuente que las unidades del S.I. resulten unas veces excesivamente grandes para medir determinadas magnitudes y otras, por el contrario, demasiado pequeñas. De ahí la necesidad de los múltiplos y los submúltiplos.

		Múltiplos					✓	Submúltiplos					
	Prefijo	giga	mega	kilo	hecto	deca		deci	centi	mili	micro	nano	ángstrom
	Símbolo	G	M	k	h	da		d	c	m	µ	nµ	Å
Lineal	Equivalencia	10^9	10^6	10^3	10^2	10		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-10}
Superficie	Equivalencia	$(10^9)^2$	$(10^6)^2$	$(10^3)^2$	$(10^2)^2$	$(10)^2$		$(10^{-1})^2$	$(10^{-2})^2$	$(10^{-3})^2$	$(10^{-6})^2$	$(10^{-9})^2$	$(10^{-10})^2$
Volumen	Equivalencia	$(10^9)^3$	$(10^6)^3$	$(10^3)^3$	$(10^2)^3$	$(10)^3$		$(10^{-1})^3$	$(10^{-2})^3$	$(10^{-3})^3$	$(10^{-6})^3$	$(10^{-9})^3$	$(10^{-10})^3$

Recordatorio de uso de la tabla

✓ Tener en cuenta la magnitud a utilizar :
  - Masa, la unidad será gramos (g)
  - Capacidad, la unidad será litro (L)
  - Longitud, la unidad será metro (m)

Para expresiones Lineales :

La tabla me indica por ejemplo que hay 10^{-6} L en 1 µL , o podríamos expresar también que hay 10^6 µL en 1L.

La tabla me indica por ejemplo que hay 10^3 g en 1 kg , o podríamos expresar también que hay 10^{-3} kg en 1g.

La tabla me indica por ejemplo que hay 10^{-9} m en 1 nm, o podríamos expresar también que hay 10^9 nm en 1 m.

Para las expresiones de superficie y volumen usar la misma lógica que para la explicación lineal.

Recordamos

Unidades de medida de longitud

El *metro* es la unidad de medida de longitud en el SI y Sistema métrico decimal; se escribe con m.

Son múltiplos del metro: decámetro (dam), hectómetro (hm), kilometro (km).

Son submúltiplos del metro: decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm), micra (µm), Ángstrom (Å)

La *micra* es la milésima parte del milímetro: $1\ \mu = 0{,}001\ mm$

Otras unidades de longitud

1 pulgada (") = cm

1 pie = 0,3048 cm

1 yarda = 3 pies = 0,9144 m

1 milla terrestre = 1609,34 m

Unidades de medida de capacidad

El litro es la unidad de capacidad, de escribe L

Algunos múltiplos son kilolitro (kL), hectolitro (hL), decalitro (daL)

Algunos submúltiplos son decilitro (dL), centilitro (cL), mililitro (mL), microlitro (µL)

Unidades de medida de masa

La cantidad de materia de un cuerpo se denomina masa, cuya unidad principal es el gramo.

Como múltiplos podemos mencionar: kilogramo (kg), hectogramo (hg) y decagramo (dag).

Como submúltiplos podemos mencionar: decigramo (dg), centigramo (cg) y miligramo(mg), microgramo (µg)

Unidades de medida de superficie

La unidad principal de superficie es el metro cuadrado, abreviadamente se escribe m^2.

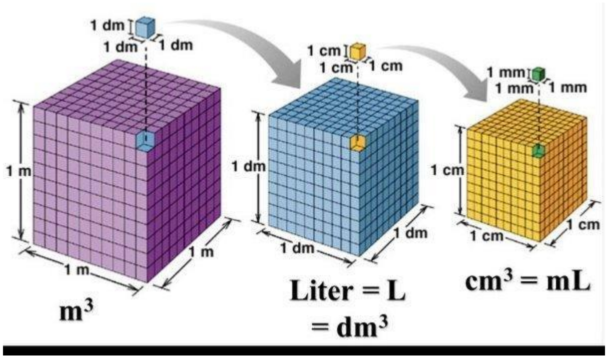
Como múltiplos podemos mencionar: decámetro cuadrado (dam^2), hectómetro cuadrado (hm^2), kilómetro cuadrado (km^2).

Como submúltiplo: decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2), milímetro cuadrado (mm^2)

Otra unidad de superficie utilizada es: la hectárea (ha). La equivalencia 1 ha=10.000 m^2.

Unidades de medida de volumen

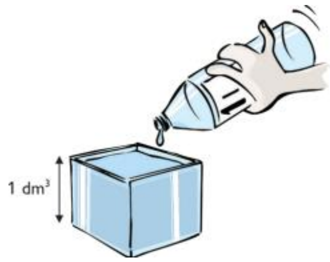
Podemos decir que el volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo. Las tres dimensiones de un objeto (largo, ancho y alto) nos aproximan a la idea de volumen. La unida principal de volumen es el metro cubico, es el volumen que tiene un cubo de 1 m de largo x 1 m de ancho x 1 m de alto.

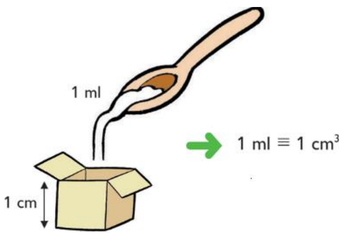


https://qph.cf2.quoracdn.net/main-qimg-0760b20d646a2a01b8b057fa4389262b

Relaciones: Volumen, masa y capacidad

Existen relaciones útiles entre las unidades de volumen, capacidad y masa. Así, un *litro* es la capacidad de un cubo de un decímetro de arista, y un *kilogramo* es la masa de dicho cubo cuando está lleno de agua destilada.





Un *mililitro* es la capacidad de un cubo que tiene 1 cm de arista.

CAPÍLULO 6: Geometría

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática. Fue la primera en desarrollarse, creando sus propias ramas gracias a que las herramientas teóricas se demostraban insuficientes para resolver nuevos desafíos y ante nuevos avances tecnológicos. Pensemos en cómo determinar la ubicación de un barco en el océano. Después del descubrimiento de América este problema se transformó en el principal problema tecnológico relacionado con la navegación. El primer obstáculo para ubicarse en el mar abierto es la falta de puntos de referencia, sólo las estrellas estaban disponibles para hacerlo junto con argumentos de semejanza de triángulos y trigonometría. Sin embargo, no son suficientes, también es necesario medir el tiempo con mucha precisión. En la edad antigua y edad media usaban relojes de arena, pero no servían en un barco por el movimiento de las aguas, ni los relojes de péndulo, cuyo balanceo se ve alterado. Por esto, para resolver este problema, durante los siglos XVI, XVII y XVIII se trabajó para mejorar los mapas y cartas de navegación, los calendarios solares y lunares, y en el desarrollo de nuevos relojes.

Estudiaremos en este capítulo una parte de la matemática conocida con el nombre de Trigonometría. En griego, el término “trigonon” significa triángulo y “metron” medida, por la cual la trigonometría se especializa en el estudio de la medida de los triángulos y surge de la necesidad de resolver problemas relacionados con la medición de ángulos y distancias en triángulos y otros polígonos. Como ejemplo de su aplicación en la medicina podemos citar el estudio del Electrocardiograma (ECG). El mismo es un procedimiento diagnóstico médico mediante el cual se obtiene un registro gráfico de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. Para su estudio y manipulación, se utilizan series trigonométricas que usan como base las funciones de “seno” y “coseno”.

Ángulo: se toma un punto del plano y, partiendo de ese punto, se dibujan dos semirrectas. A la abertura formadas

Clasificación de los ángulos según la posición de las semirrectas:

Ángulo nulo: 2 semirrectas coincidentes (0°)

Ángulo recto: 2 semirrectas perpendiculares (90°).

Ángulo llano: 2 semirrectas opuestas (180°, dos ángulos rectos)

Ángulo completo: 2 semirrectas coincidentes (360°, 4 ángulos rectos).

Clasificación según la abertura:

Agudo: abertura inferior a un ángulo recto (<90°)

Recto: abertura igual a 90°.

Obtuso: abertura superior al ángulo recto (>90°).

Clasificación según la posición relativa:

Externos: ángulos que no tienen ningún elemento en común.

Opuestos por el vértice: ángulos que tienen en común el vértice.

Consecutivos: ángulos que tienen en común vértice y un lado.

Adyacentes: son ángulos que tienen un lado en común y forman entre los dos un ángulo llano.

Polígono: es una figura plana cerrada delimitada por segmentos. Los elementos son:

Lados: segmentos que delimitan un polígono. Si están trazados uno a uno, a continuación del otro, son lados consecutivos.

Vértices: puntos donde se unen los lados de un polígono.

Ángulo: regiones delimitadas por dos lados consecutivos.

Apotema: segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono al punto medio de cualquiera de sus lados.

Diagonal: segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Radio: segmento que une el centro del polígono con un vértice. Lo representamos con "*r*".

Centro: punto equidistante de todos los vértices. Se representa por la letra *"O"*.

Se clasifican según:

Sus ángulos: si tiene todos sus ángulos menores a 180°, se denomina *"polígono convexo"*. Si alguno de sus ángulos es mayor a 180°, se llama "*polígono cóncavo"*.

Según la cantidad de lados: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc.

Triángulo*:* es el polígono de tres lados. La medida de sus lados y ángulos han de cumplir ciertas condiciones.

Relaciones: dado un triángulo ABC siempre se cumple que:

- *El lado mayor es menor que la suma de los otros dos lados.*
- *El lado menor es mayor a la diferencia entre los otros dos.*

Esta propiedad que han de cumplir las longitudes de los lados de un triángulo, se expresa así: $a < b + c$ y $c > a + b$.

Dos triángulos son iguales si tienen todos sus ángulos iguales.

Tipos de triángulos:

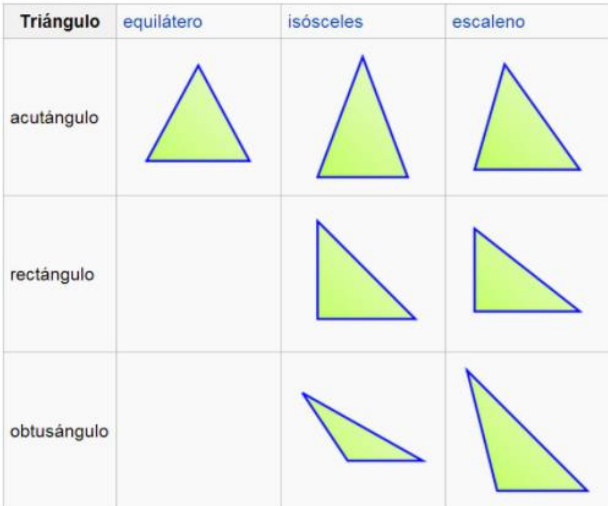
Según sus lados:

- *Equilátero*: tiene los tres lados iguales, por lo que sus ángulos son iguales.
- *Isósceles*: tiene dos lados iguales, entonces tiene dos ángulos iguales y uno desigual. El ángulo desigual es el formado por los lados iguales.

Escaleno: tiene los tres lados desiguales. Sus ángulos también son todos desiguales.

Según sus ángulos:

- *Acutángulo:* los tres ángulos son agudos.
- *Rectángulo*: los tres ángulos son rectos.
- *Obtusángulo*: tiene un ángulo obtuso, menor que 180°.



Postulados de Tales de Mileto:

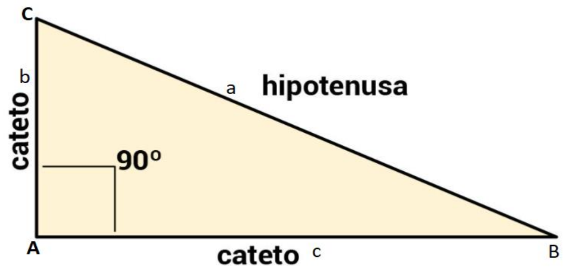
1. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
2. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a lados iguales, son iguales.
3. Dos triángulos son iguales si tienen dos ángulos y un lado iguales.

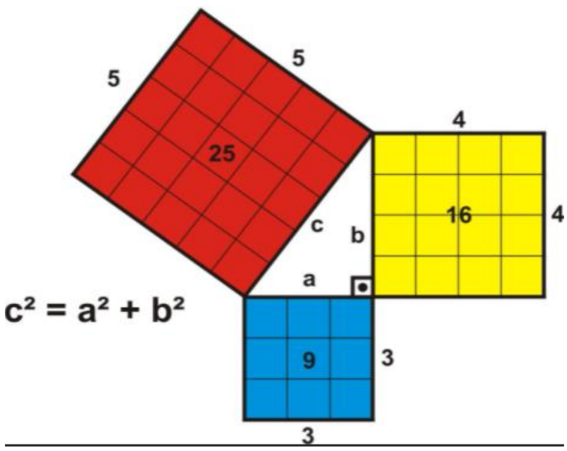
Teorema de Pitágoras: Pitágoras de Samos (*ca*. 580 a. C. – *ca*. 495 a. C.) fue un filósofo y matemático griego, considerado el primer matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de la aritmética, derivada particularmente de las relaciones numéricas aplicadas a la teoría de la música, la astronomía y la teoría de pesos y medidas. Se interesó también en medicina, filosofía, ética, entre otras disciplinas. Quienes introdujeron a Pitágoras a las ideas matemáticas y astronómicas fueron Tales y Anaximandro, ambos de Mileto, que le habrían aconsejado visitar Egipto para interiorizarse más en estos temas. Su historia señala que aprendió geometría de los egipcios y de las enseñanzas de Tales y Anaximandro.

Así es como demostró el teorema hoy conocido por su nombre. El mismo expresa que: "en un triángulo rectángulo, la suma de los catetos cuadrados es igual a la hipotenusa cuadrada".

Esto se traduce en que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

$a^2 = b^2 + c^2$





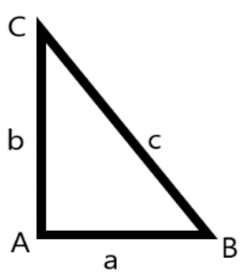
Razones trigonométricas:

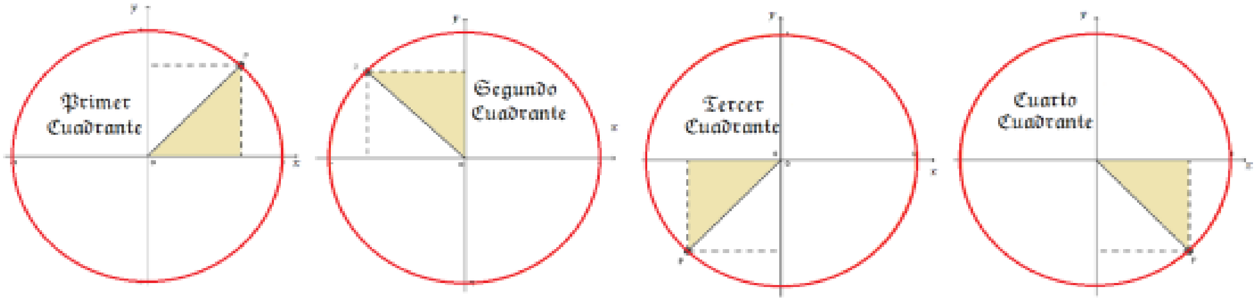
Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, los ejes coordenados dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes. Con el objeto de analizar los signos de sin(α) y cos(α) (y por tanto el del resto de las funciones trigonométricas) se pueden observarlas coordenadas del punto P para ángulos de medida α con los lados terminales en los cuatro cuadrantes. Veamos gráficamente cómo sería cada caso.

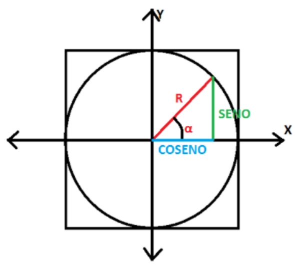
- Seno de α: $\frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$

- Coseno de α: $\frac{cateto\ contiguo\ de\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$

- Tangente de α: $\frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{cateto\ contiguo\ de\ \alpha} = \frac{b}{c}$







Llamamos circunferencia goniométrica a una circunferencia de radio 1 que tiene el centro en el origen de coordenadas y que utilizamos para representar ángulos. Los ángulos se miden siempre desde el eje 0X y en sentido directo (contrario a las agujas del reloj). Las coordenadas coinciden con las razones trigonométricas, y viendo esto se puede deducir que:

- *El seno* (ordenada del punto P) es un número positivo para los ángulos del primero y del segundo cuadrante y es negativo para ángulos en el tercero y cuarto cuadrante.
- *El coseno* (abscisa del punto P) es un número positivo para los ángulos del primero y del cuarto cuadrante y es negativo para ángulos en el segundo y tercer cuadrante.
- *La tangente* resulta positiva en el primer y tercer cuadrante; y negativa en el segundo y cuarto cuadrante.
- Los signos de las demás razones trigonométricas son consecuencia de los signos de las funciones seno y coseno.

Relaciones trigonométricas:

Consideramos un triángulo rectángulo *ABC*:

El ángulo α cumple que: $sen\ \alpha = \frac{b}{a}\ \ y\ cos\ \alpha = \frac{c}{a}$

Elevamos al cuadrado ambas expresiones: $sen^2\ \alpha = \frac{b^2}{a^2}\ \ y\ \ cos^2 = \frac{c^2}{a^2}$

Y las sumamos: $sen^2\alpha + cos^2\ \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

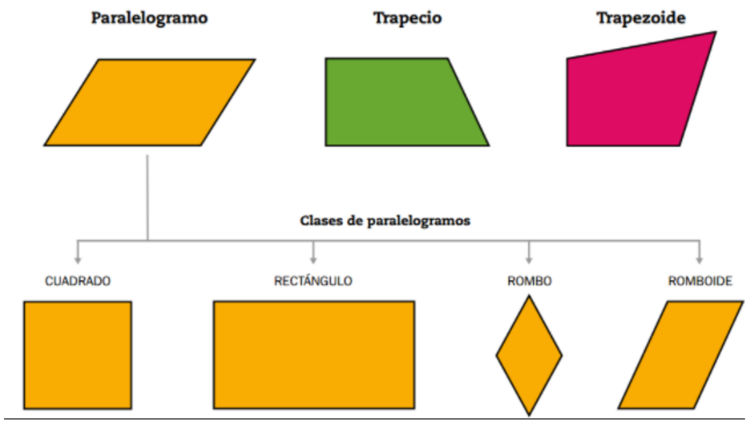
$$sen^2\ \alpha + cos^2\alpha = 1$$

Se conoce como *Relación Fundamental de la Trigonometría.*

Otra relación importante es: $tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Cuadrilátero*:* es cualquier polígono de cuatro lados. Tiene lados opuestos, que son dos lados no consecutivos y vértices opuestos, que son dos vértices no consecutivos. Se clasifican en:

- *Trapezoides:* cuadrilátero que no tiene lados paralelos.
- *Trapecios:* tienen dos lados paralelos. A su vez estos se clasifican en Trapecio rectángulo con dos ángulos rectos; trapecio isósceles con dos se sus lados iguales y Trapecio escaleno que no tiene ni lados ni ángulos iguales.
- *Paralelogramos:* tienen los cuatro lados paralelos, dos a dos. También se clasifican en: cuadrado, que tiene los cuatro lados iguales, rectángulo, que tiene los lados iguales, dos a dos, y los cuatro ángulos rectos; rombo con los cuatro lados iguales; y romboide que tiene los lados y los ángulos iguales, dos a dos, pero no tiene ángulos rectos.



Círculo: es la parte del plano limitado por línea que llamaremos circunferencia. La circunferencia es una línea cerrada y plana cuyos puntos están situados a la misma distancia de otro punto, llamado centro.

Se pueden distinguir los siguientes elementos:

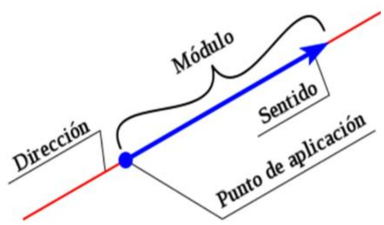
- *Centro*: punto en el cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- *Radio*: segmento que une el centro de la circunferencia con un punto de la misma.
- *Cuerda*: segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- *Arco*: parte de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos. A cada cuerda le corresponden dos arcos, uno de menor longitud que el otro. Si las longitudes de los dos arcos son iguales, el arco se llama semicircunferencia, y la cuerda es un diámetro.
- *Diámetro:* cualquier cuerda que pasa por el centro 0. El diámetro divide a la circunferencia en dos semicircunferencias iguales.

<u>**Vectores:**</u> para representar magnitudes escalares se utilizan números y para las magnitudes vectoriales se utilizan vectores.

Un vector es un segmento orientado y queda determinado por dos puntos del plano, A y B, y el orden de estos. El primero de los puntos se llama origen y el segundo extremo. Se escribe $\overrightarrow{AB}$.

<u>Elementos de un vector:</u>

- *Módulo*: es la longitud del segmento AB. Se denota $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- *Dirección*: es la recta sobre la que está situada el vector $\overrightarrow{AB}$. Una recta y todas sus paralelas determinan una misma dirección.
- *Sentido:* es la forma de recorrer el vector $\overrightarrow{AB}$, es decir, fijando cuál de los puntos es el origen y cuál el extremo.

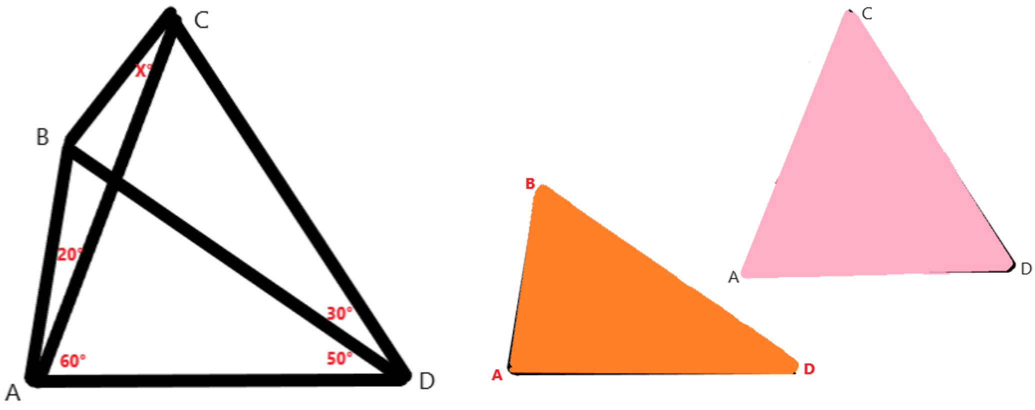


Las magnitudes vectoriales son aquellas en donde no nos interesa solamente su valor, sino también su dirección y el sentido. Una de las magnitudes vectoriales más habituales es la fuerza. En un vehículo, aplicar una fuerza en un sentido u otro, determinará que el vehículo avance o retroceda a lo largo de una determinada dirección.

Para expresar un vector lo podemos hacer mediante su origen y extremo, $\overrightarrow{AB}$, o mediante una sola letra: $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, (éstas son las más utilizadas). Si queremos detallar un vector, se colocan las letras y a continuación sus coordenadas entre paréntesis.

Los vectores se pueden sumar, restar, multiplicar, pueden ser paralelos o perpendiculares. Además, conociendo un vector y un punto o fijando dos puntos podemos determinar una recta. Recta es la línea que une ambos puntos y se prolonga indefinidamente. Partiendo de aquí, de bases geométricas, podemos realizar ecuaciones de la recta. Pero ese ya es tema de otro capítulo.

¡EXTRA! ¡Barrilete! (para ver que tan bien parado estás sobre la tierra con geometría).



(Imagen de muestra, no tiene las medidas exactas)

Aquí la imagen el barrilete nos pide calcular "X°", que representa al ángulo BCA. Luego tenemos todos los ángulos con su respectiva medida. Lo primero que tenemos que pensar es que debemos simplificar la figura del barrilete usando la intuición. Es decir, vamos a dividirlo en los triángulos. Lo primero que tenemos que recordar es que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo debe dar 180°.

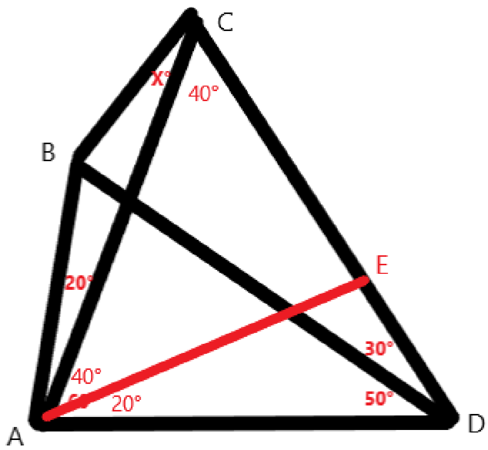
Para comenzar observemos el triángulo ABD. ¿Podemos calcular el ángulo B usando la regla de la suma de los ángulos internos? Veamos… el ángulo D mide 50°; el ángulo A mide 80° (20° + 60°= 80°) por lo que si hacemos la cuenta a la inversa…

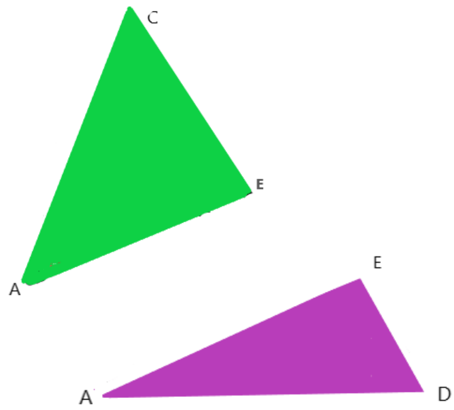
180° - 80° - 50°= 50°. Tenemos la medida de B de este triángulo.

Ahora bien, el triángulo ABD es un triángulo isósceles y recordemos las características de dicho triángulo: tiene dos ángulos iguales y dos lados iguales que son opuestos. Es decir, el lado AB opuesto a un ángulo de 50° va a ser igual que el lado AD opuesto al otro ángulo de 50°.

Seguimos con el triángulo ACD y realizamos el mismo planteo. (50° + 30° = 80°) 180° - 80°- 60°= 40°. El ángulo C de este triángulo mie 40°. Podemos seguir de esta manera, pero va a ser muy difícil llegar al valor de X°. ¿Entonces como lo resolvemos?

La respuesta es: CON MAS TRIÁNGULOS. Debemos ir trazando nuevos triángulos isósceles. Tenemos que buscar ángulos iguales y lados iguales, como en la siguiente imagen.

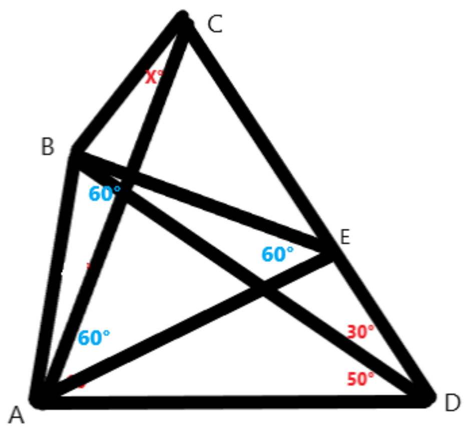


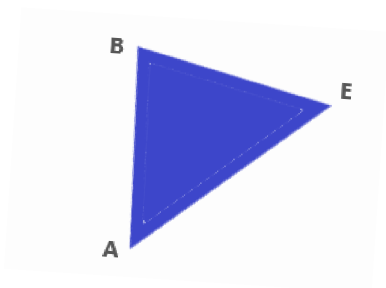


Tenemos un nuevo triángulo marcado por el trazado de un nuevo lado al punto E. Al ángulo A del triángulo ACD (que antes media 60°) lo dividimos de manera tal que nos queden 20° por un lado y 40° por el otro para poder ser opuesto a su ángulo C de 40°. Así tenemos un nuevo triángulo isósceles, el ACE.

Observemos que paso con el otro triángulo nuevo que se formó con la misma recta, AED. El ángulo D mide 80° (50° + 30°= 80°) y según nuestro planteo inicial… 180° - 80° - 20°= 80°. Es la medida del ángulo E…por lo tanto, otro triángulo isósceles nuevo, los ángulos E y D miden lo mismo. Pero todavía nos falta más!

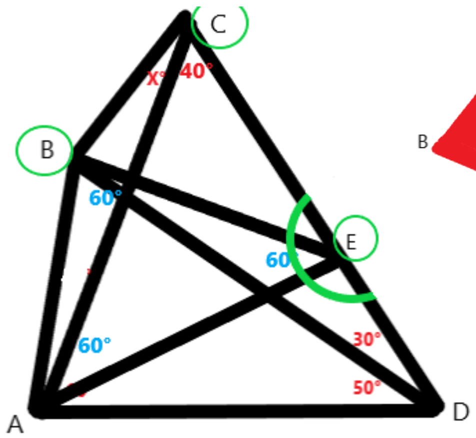
Vemos que nos falta unir los puntos B y E. Vamos a ver qué pasa…

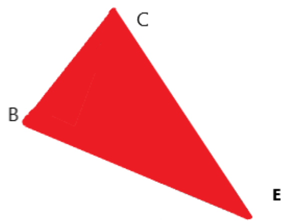




Si prestamos atención a todo el proceso que venimos realizando, ahora se formó un triángulo equilátero, ABE. Su ángulo A mide 60° ya que está conformado por los ángulos anteriormente trazados de 20° y 40°. Si repasamos la característica del triángulo equilátero, veremos que todos sus ángulos son iguales del mismo modo que sus lados. Deducimos que todos sus ángulos miden 60° (o lo podemos comprobar viendo que el ángulo B del triángulo anterior ABD media 50° a los que se le sumaron 10° del nuevo trazado y el ángulo nuevo E lo obtenemos de restarle los demás ángulos a 180°, nuestra teoría inicial).

Finalmente nos podemos dar cuenta de que se formó otro triángulo más con este último trazo. El triángulo BCE. Ya teníamos el valor de uno de los ángulos que conforman C, 40°. El resto de los ángulos no los tenemos, pero si podemos deducir cuanto mide esta parte del ángulo E. Como? Acá entra la teoría del ángulo llano.





E es un ángulo llano. Tenemos las medidas de los ángulos que se formaron cuando trazamos rectas hacia ese punto E. El perteneciente al triángulo AED mide 80° como ya calculamos antes. El perteneciente al triángulo ABE mide 60° como los demás ángulos por ser equilátero. El ángulo llano sabemos que mide 180° (recordamos que son dos semirrectas opuestas). Entonces… 180° - 80° - 60°= 40°. El ángulo E del último triángulo encontrado BCE mide 40°. Tranqui que ya casi llegamos.

A simple vista se ve que este último triángulo que descubrimos es isósceles…

- La suma de los ángulos internos de un triángulo debe dar 180°. Triángulo BCE. Angulo E mide 40°. 180°.
- 180° - 40°= 140°….
- Dos lados y dos ángulos iguales. 140°/2: 70° miden los ángulos B y C de dicho triángulo.

El ángulo C sabemos ahora que mide 70°. Le restamos los 40° que formaban el triángulo ACD…

X°= 30°!

Habrán visto que repitiendo las teorías básicas de la geometría plana y la intuición pudimos resolver este largo problema. El barrilete en el cielo y los pies en el suelo.

CAPÍTULO 7:
Cálculo porcentual

Siguiendo la línea de los números racionales, imaginemos que tenemos una caja con 75 lápices y queremos tomar 2/5 de ellos, eso significa entonces dividir a 75 en cinco partes iguales y de esas partes tomar sólo dos. Numéricamente esa expresión representa: $\frac{2\,.75}{5} = \frac{2}{5} = 30$. Como vemos, tomar una fracción de un total se resuelve multiplicando ambas magnitudes.

Ejemplo: Mariana tiene $2025 y gastó $\frac{2}{5}$ del dinero en un jean y $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba en comprar un Libro de Aventuras. ¿Cuánto dinero le queda aún?

Solución: En primer lugar, vamos a calcular cuál fue el costo del jean. Como el mismo representa $\frac{2}{5}$ del total del dinero calcularemos: $\frac{2}{5}\,.2015 = \$810$ (lo que costó el jean). Luego de esa compra a Mariana aún le quedan 2025 - 810 = 1215 pesos, de los cuales gastó 13 en un libro de aventuras. Calculemos ahora cuánto costó el libro: $\frac{1}{3}\,.1215 = \$405$. Así, de los $1215 que tenía Mariana luego de comprar el jean, ahora sólo le quedan 1215 - 405 = 810 pesos. Luego la respuesta a la pregunta planteada será: a Mariana aún le quedan $810.

El conocido término *porcentaje* es una forma de expresar una fracción o parte de un entero, siendo el entero el número 100. Es decir, tomar por ejemplo el 30% de un total significa tomar 30/100 partes de ese total. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: Los embalses de agua que abastecen a una ciudad tienen una capacidad total de 400 km^3 y se encuentran al 27% de su capacidad. ¿Cuántos km^3 de agua contienen?

Solución: De acuerdo a lo enunciado por el problema el embalse tiene tan sólo el 27% de su capacidad total, la cual es de 400 km^3. Averigüemos cuánto representa ese porcentaje en km^3 y para ello calcularemos: $\frac{27}{100}\,.400 = 108$

Por lo tanto, el embalse contiene 108 km^3 de agua.

Los porcentajes son una forma de presentar la información numérica. Las tiendas la utilizan para expresar descuentos, los fabricantes para informar el contenido de sus productos, los bancos para indicar los intereses de las cuentas de ahorro y préstamos; en Medicina Veterinaria lo usarás en más de lo que te imaginas.

Desde el contenido de una droga en una medicación, la pureza de una droga, el contenido de proteínas, lípidos, carbohidratos y minerales de un alimento; la deshidratación de un animal; hasta el cálculo de rentabilidad en la empresa ganadera las veras expresadas en forma porcentual. Por ello es de gran importancia entender y aplicar este concepto en la vida cotidiana del futuro Médico Veterinario para poder dosificar a un paciente, indicar alimentación, preparar dietas nutritivas para animales en engorde como así también soluciones en un laboratorio de diagnóstico; y no olvidarnos la importancia de saber si nuestra empresa es o no rentable.

Recordemos:

En tanto por ciento o porcentaje, cuyo símbolo es % se puede escribir en forma de fracción y tiene un valor decimal.

Se pueden efectuar tres operaciones distintas:

- Convertir un porcentaje en fracción y número decimal

$$\% \rightarrow fracción \rightarrow decimal$$

- Convertir un número decimal en porcentaje

$$decimal \rightarrow fracción \rightarrow \%$$

- Convertir una fracción en porcentaje

$$fracción \rightarrow decimal \rightarrow \%$$

Para expresar una fracción como porcentaje hay que escribirla primero como número decimal

Por ejemplo:

a) Si hay 10 bovinos Raza Aberdeen Angus en un lote de pastura, 7 de ellos son negros y 3 son colorados, ¿Qué porcentaje (que parte del total) representan estos 3 animales colorados?

El total (los 10 animales) se considera que es el 100 por cien (se representa por 100 %).

Para calcular el porcentaje que representan los 3 animales colorados:
Se divide el número de animales colorados entre el total de animales (se obtiene el número decimal)

$$3 / 10 = 0{,}3$$

Luego se multiplica por 100 (para expresarlo en porcentaje).

$$0{,}3 \, x \, 100 = 30 \, \%$$

Los 3 animales colorados representan el 30% de los animales Aberdeen Angus
Veamos otros ejemplos:

b) En una camada de 6 cachorros de raza Ovejero Alemán, nacieron 4 hembras. ¿Qué porcentaje representan del total de los hermanos?

$$4 / 6 = 0{,}666$$

$$0{,}66 \, x \, 100 = 66{,}6 \, \%$$

c) Una muestra de sangre se envía al laboratorio para su análisis y algunos de los valores hallados en la serie blanca fueron.

Leucocitos $6700\ /mm^3$

Neutrófilos segmentados	3%
Neutrófilos en banda	62%
Eosinófilos	2%
Basófilos	0%
Linfocitos	15%
Monocitos	3%

Cómo hacemos para saber a cuántos corresponden / mm^3

Por ej. Para los Neutrófilos segmentados

$$3\%\ de\ 6700\ =\ 6700\,.\,3/100\ =\ 201$$

d) A 200 pacientes con dolor de cuello se les asignó distintos tratamientos. El 47 % de ellos recibió cuidado con fisioterapia, el 38 % hizo ejercicio, el resto de pacientes fueron 45 tratados con medicamentos. En base a esta información calcular:

1) Cuántos pacientes fueron tratados con fisioterapia
2) Cuántos pacientes hicieron ejercicios

$$\frac{38}{100}\,.\,200 = 76\ pacientes$$

3) Cuántos pacientes fueron tratados con medicamentos

$$\frac{15}{100}\,.\,200 = 30\ pacientes$$

¡EXTRA! Diputados y senadores.

Este caso es especial para pensar ante la toma de decisiones. Lee con atención y vas a ver que en algún momento de tu vida te tropezaras (si es que ya no te ocurrió) con un problema de estos.

Una compañía maderera (y papelera) esta obviamente muy interesada en talar árboles el noroeste argentino. El área está repleta de pinos, a tal punto que después del último relevamiento de la zona se sabe que el 99% de los arboles de esa región son justamente

pinos: ideal para predar. A la compañía en cuestión le interesan únicamente los pinos y ya está lista para firmar contrato con los dueños de la tierra.
Los residentes de la zona y las organizaciones sociales, sabiendo lo que está por pasar, luchan para que no se tale ningún árbol. Sin embargo, como buenos conocedores de que eso no está por prosperar (sabemos que hay mucho dinero en juego) están dispuestos a hacer algunas concesiones. Para eso, presionan a los funcionarios públicos que tienen la obligación de regular esa área y logran que se incorpore una cláusula en el contrato con algunas restricciones.
En un gesto que resulta curioso, es la misma maderera la que envía el texto de la cláusula que termina siendo aceptado, y más aún, votado por la mayoría de los legisladores. Leamos con cuidado el siguiente texto:
“Se permite a la maderera tal cual proceder a la poda de pinos únicamente. Habida cuenta de que, a la firma del contrato, el número de pinos del área representa un 99% del total de árboles, la empresa tendrá 60 días para realizar su tarea, y al finalizar la poda, la cantidad de pinos remanentes tendrá que representar el 90% del total de árboles de la zona en discusión.”
Con esta cláusula, todo el mundo quedo satisfecho. Entendieron que reducir de un 99% a un 90% no era tan grave. Los funcionarios terminaron aprobándolo por unanimidad.
¿Qué paso cuando termino la poda?
Un escándalo increíble.
Tomaron rutas, quemaron neumáticos, funcionarios acusados de corrupción, escraches y denuncias de violación del contrato. Un desastre.
¿Qué paso? ¿Cuántos pinos se llevó la compañía? Si el contrato se respetó, ¿qué fue lo que funciono mal?
Antes de sacar conclusiones, hagamos algunas cuentas…
Supongamos que le bosque tenía 100 árboles. Como se sabe que el 99% son pinos, entonces hay 99 pinos de esos 100. En todo caso, un solo árbol no sería un pino.
Lo que sabemos con certeza es que el único árbol que no era un pino tiene que estar con certeza entre los que no se llevó la compañía. PERO… acá prestemos atención… la diferencia está en que mientras ese único árbol representaba el 1% del total de árboles ANTES de la poda, una vez finalizada, AHORA tiene que representar el 10% del total. Y cual tiene que ser el total de árboles que quedaron para que UN ARBOL SEA EL 10%? (¿Queres pensar la respuesta vos?)
UNO ES EL 10% DE 10! Es decir, luego de la poda, ¡el total arboles se redujo a 10! La compañía maderera se llevó 90 pinos. ¡Nadie violo ningún contrato! Lo que paso es que haberles permitido podar los pinos que había hasta reducir la cantidad de manera tal que después de la poda, le numero de pinos represente el 90% del total de los árboles, le permitió a la empresa llevarse 90 de los 99 pinos. ¡Nadie puede reclamar nada! ¡¡¡HAY QUE SABER HACER LAS CUENTAS ANTES!!! Hay que leer bien las cláusulas que involucran porcentajes bien explícitos.

MORALEJA: está claro que el ejemplo es ficticio, pero lo mismo sucedería en el caso general cuando el total de árboles no fuera 100, vale siempre en la medida en que se respeten los porcentajes indicados. En este caso los “no pinos” siempre representan el 1% del nuevo total.

CAPÍTULO 8: Ecuaciones

Ecuaciones

Expresiones algebraicas

Se llama expresión algebraica a una combinación de letras y/o números, vinculados entre sí por las operaciones de suma resta, producto, cociente, potencia e índice radical.

Ej.: $4a^2 \cdot b - 2b + 8c$

Ecuación algebraica

Se llama así a la *igualdad* entre dos expresiones algebraicas, que sólo se verifica para determinados valores de algunas de sus letras, llamadas incógnitas. Los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación se llaman raíces de la ecuación.

Ej.: $3x - 2 = 4 \quad \Rightarrow$ ecuación con raíz $x = 2$

Elementos de una ecuación

- Llamamos *incógnita* de una ecuación a las letras que intervienen en ella.
  $3\,y^2 - x - 7 = 22$ → Ecuación con dos incógnitas, x e y.
  $4x\,(x^2 + 1) - x = 1$ → Ecuación con una incógnita, x.

- Llamamos *grado* de la ecuación al mayor de los exponentes con que figura la incógnita después de realizar todas las operaciones que se indican en la ecuación

  $2x - 8 = 0$ → Ecuación de grado 1 o de primer grado.

  $(x-5)(x-2) = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ → Ecuación de grado 2 o de segundo grado

- En una ecuación, a la parte izquierda de la igualdad se lo denomina *primer miembro*, y a la parte derecha, *segundo miembro*.

Cada miembro está formado por uno o más sumandos que se denominan términos.

$$\underbrace{\underbrace{6x}_{\textit{término}} + \underbrace{7(x-1)}_{\textit{término}}}_{\text{1er miembro}} = \underbrace{\underbrace{2x}_{\textit{término}} + \underbrace{5}_{\textit{término}} - \underbrace{(x-1)}_{\textit{término}}}_{\text{2do miembro}}$$

- Las *soluciones* de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad sea cierta. Una ecuación puede tener una, varias o ninguna solución. Resolver una ecuación es encontrar su solución o soluciones.

Las normas a seguir para resolver este tipo de ecuaciones son las siguientes:

a) Todo término que se encuentra en un miembro ***multiplicando*** pasará al otro miembro ***dividiendo***

Ej.: $a = b \, . x \quad \Rightarrow \qquad a/b = x$

b) Todo término que se encuentra en un miembro ***dividiendo*** pasará al otro miembro ***multiplicando.***

Ej.: $x \, / \, b = a \quad \Rightarrow \qquad x = a \, . b$

Todo término que se encuentra en un miembro sumando pasará al otro miembro restando

Ej.: $x + a = b \qquad x = b - a$

Todo término que se encuentra en un miembro restando pasará al otro miembro sumando.

Ej.: $x - a = b \quad x = b + a$

En primer lugar, deben pasar los términos que estén multiplicando o dividiendo

En el caso de encontrarse una operación de suma o resta dentro de un paréntesis en uno de los miembros, puede resolverse o bien, puede pasarse el total del paréntesis al otro miembro.

Ej.: $(a + b)x = c \;\Rightarrow\; x = \frac{c}{(a+b)}$

MULTIPLICACION	DIVISION
$+ \cdot + = +$	$+ : + = +$
$- \cdot - = +$	$- : - = +$
$+ \cdot - = -$	$+ : - = -$
$- \cdot + = -$	$- : + = -$

Ecuaciones algebraicas de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita es cualquier ecuación que se puede expresar de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$

La solución es $x = \frac{-b}{a}$

Toda ecuación de primer grado con una incógnita, si tiene solución, ésta es única, por lo que es conveniente reducirla (mediante pasaje de términos)

Para resolver ecuaciones de primer grado hay que seguir siempre una misma estrategia que facilite su resolución:

Ejemplo: 7 · (x + 1) – 4 · (x + 3) = x – 9

1. Quitar paréntesis realizando las operaciones correspondientes:

$$7x + 7 - 4x - 12 = x - 9$$

2. Agrupar los términos con la *x* en un miembro de la ecuación y los términos sin la *x* en el otro (recuerda que al pasar un término de un miembro a otro de la ecuación cambia su signo):

$$7x - 4x - x = -9 - 7 + 12$$

3. Operar: $2x = -4$

4. Despejar la *x*:

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

5. Comprobar la solución: para lo que se sustituye el valor obtenido en la ecuación de partida:

$7 \cdot (-2 + 1) - 4 \cdot (-2 + 3) = -2 - 9$
$7 \cdot (-1) - 4 \cdot (1) = -11$
$-11 = -11$

Para poder resolver las ecuaciones de 1er Grado es necesario, recordar algunos pasos:

- ✔ Eliminar paréntesis.
- ✔ Reducir términos semejantes (si los hubiera).
- ✔ Transponer términos. (pasos que se pueden repetir)
- ✔ Reducir términos semejantes. (pasos que se pueden repetir)
- ✔ Despejar la incógnita y hallar su valor.

Para evitar errores recordar que el signo – delante de un paréntesis cambia todos los signos de su interior

$$-(x + 1) = -x - 1 - 2\,(4x - 3) = -8x + 6$$

Ejemplos:
Resolver la siguiente ecuación: $4\,(x-3)+40=64-3\,(x-\ 2)$

Eliminar paréntesis	$4x-12+40=64-3x+6$
Reducir términos semejantes	$4x+28=70-3\,x$
Transposición de términos	$4x+28+3x=70$
Reducir términos semejantes	$7X+28=70$
Transposición de términos	$7x=70-28$
Reducir términos semejantes	$7x=42$
Despejar la incógnita y hallar la ecuación	$x=\frac{42}{7}=6$
Comprobar que la solución hallada es la correcta	$4\,(x-3)+40=64-3\,(x-\ 2)$ $4\,(6-3)+40=64-3\,(6-\ 2)$ $(4\,.3\,)+40=64-\ 3\,.\,4$ $12+40=64-12$ $52=52$

<u>EXTRA!!! Un mago adivina las cartas.</u>

Hay un mago que tiene en sus manos un mazo de cartas españolas, como las que sirven para jugar a la escoba. Por lo tanto, están excluidos los 8 y los 9. Así el numero 10 vale 8, el numero 11 vale 9 y el 12 vale 10. El resto de las cartas tienen el valor que su número indica. Los palos son los ya conocidos: oro, copa, basto y espada.

El mago le ofrece a una persona que elija una carta cualquiera y le pidió que haga las siguientes operaciones:

- Multiplique por 2 el número de la carta;
- Al resultado súmele 1;
- A lo que obtiene, lo multiplica por 5;
- Por último, si la carta elegida es de oro súmele 4, si es de espada súmele 3, si es basto súmele 2 y si es de copa súmele 1.

Con estos datos, el mago le pide a la persona que le diga que numero le dio con todas las indicaciones. La respuesta que obtiene es 39. "El mago piensa un instante y replica: la carta que usted eligió es el 3 de oro".

¿Como hizo?

Primero observemos la cuenta que hizo la persona que eligió la carta que le dio 39:

- Al multiplicarlo por 2, obtiene 6.
- Al sumarle 1, obtiene 7.
- Al multiplicarlo por 5, obtiene 35.
- Al ser de oro, le suma 4.

¿Entonces como hizo el mago para volver para atrás, partiendo del numero 39?
Al no conocer la carta, le asignamos un valor X.

Parte por parte seria así:
- Lo multiplicamos por 2. Obtuvimos 2.X
- Le sumamos 1. Entonces queda (2.X+ 1)
- Después había que multiplicar por 5. Así obtuvimos:

(2.X+ 1) . 5=
10 . X + 5 (que es múltiplo de 5)

Al sumarle el número para cada palo, transformo el resultado:
- Un múltiplo de 5 más 4 si es de oro,
- Un múltiplo de 5 más 3 si es de espada,
- Un múltiplo de 5 más 2 si es basto,
- Un múltiplo de 5 más 1 si es de copa.

En base a esto podemos ver que, al resultado de la persona, 39, le sacamos el 4, nos queda 35 que es un múltiplo de 5. Por lo que se deduce que es de oro por tener que restarle 4.
Luego tratamos de calcular el valor de X en la igualdad. En consecuencia
10 . X + 5= 35
10 . X= 35 – 5
10 . X= 30
X= 30 / 10
X= 3

¿Se animan ahora a calcular que carta seria si el resultado hubiese sido 86?

¿Nos crees si te decimos que fue el 10 de copas?… por las dudas calcúlalo.

Ecuaciones algebraicas de primer grado con dos incógnitas.

Una ecuación de primer grado con **una** incógnita es una igualdad algebraica que tiene una sola incógnita con exponente 1. Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se llaman ***ecuaciones lineales.***

Solución de una ecuación lineal es todo par de valores que verifica la ecuación. La expresión general de una ecuación lineal es $ax + by = c$, donde:
a, b : coeficientes de las incógnitas; valores conocidos
c : es el término independiente, valor conocido
x, y: incógnitas de la ecuación lineal; son valores desconocidos.

Ejemplo: $2x + y = 6$ es una ecuación lineal: 2 y 1 son coeficientes de las incógnitas, 6 es el término independiente, x e y son las incógnitas. Calculamos los valores de *x* e *y* que verifican la ecuación, para ellos realizamos el despeje de la ecuación de la incógnita *y*, le damos valores a *x*,

X	$y = 6 - 2x$	y
1	$y = 6 - 2\,.\,1$	**4**
2	$y = 6 - 2\,.\,2$	**2**
0	$y = 6 - 2\,.\,0$	**6**
-2	$y = 6 - 2\,.\,(-2)$	**10**
-1	$y = 6 - 2\,.\,(-1)$	**8**

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos ecuaciones de este tipo

$$\{a_1x + b_1y = c_1 \; a_2x + b_2y = c_2 \}$$

Constituye un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas "*x*" e "*y*". La solución del sistema es el par de valores que deben tomar *x* e *y* para satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente.

Sea el sistema

$$\{3x + 2y = 78 \; 4x + y = 54 \}$$

La ecuación $3x + 2y = 78$ tiene infinitas soluciones.

Por ejemplo: $x = 0$, y$= 39$; $x = 10,\ y = 24$; $x = 30,\ y = -6$; ....

La ecuación $4x + y = 54$ también tiene infinitas soluciones.

Por ejemplo: $x = 0, y = 54$; $x = 10,\ y = 14$; $x = 6,\ y = 30$; ....

De todas estas infinitas soluciones de cada ecuación, sólo hay una que coincide en ambas: $x = 6,\ y = 30$. Esta es la *solución del sistema.*

Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones consisten en obtener la solución en forma rápida y automática, sin recurrir al tanteo. Pueden ser de reducción, de sustitución y de determinantes. El de sustitución es el que usaremos.

Método de sustitución:

Sea el sistema: $\{3x + 2y = 78\ (1)\ 4x + y = 54\ (2)$

de la ecuación (2) expresamos "*y*" en función de "*x*":	$y = 54 - 4x$ (3)
sustituimos "*y*" en la ecuación (1) por esta expresión:	$3x + 2\,(54 - 4x) = 78$
Resolvemos esta ecuación con una incógnita:	$3x + 108 - 8x = 78$ $3x - 8x = 78 - 108$ $-5x = -30$
y por lo tanto	$x = 6$
Este valor de "*x*" hallado se sustituye en la ecuación (3) que es aquella en la que aparecía despejada "*y*":	$y = 54 - 4.6$ $y = 54 - 24$ $y = 30$

La solución es por lo tanto $x = 6$; $y = 30$

Resumen: El método consiste en expresar una incógnita en función de la otra, despejándola de una de las ecuaciones. Con esa expresión, reemplazándola en la otra ecuación, se halla su valor.

Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones.

Sea el sistema: $\{3x + 5y = 4 \; 6x + 10y = 8\}$

Se puede observar que las dos ecuaciones son prácticamente la misma: una de ellas es la otra multiplicada por un número. En este caso, las infinitas soluciones de una serán también soluciones de la otra. El sistema tiene infinitas soluciones y se llama sistema compatible indeterminado.

Sistemas de ecuaciones sin solución:

Sea el sistema $\{3x - 5y = 4 \; 3x - 5y = 2$

En él se puede observar que si $3x - 5y$ es igual a 4, es imposible que $3x - 5y$ también sea igual a 2. Por lo tanto, no es posible encontrar una solución común a ambas ecuaciones. El sistema *no tiene solución* y se llama *incompatible*.

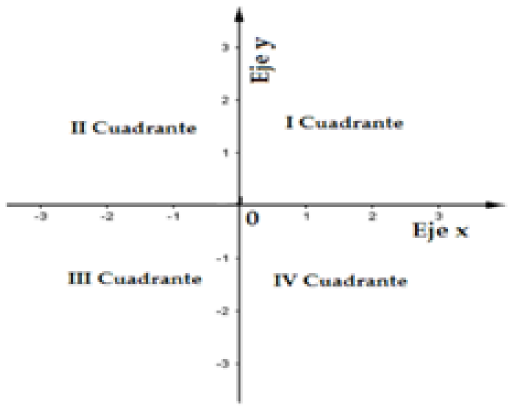
Al resolverlo se llega a una expresión del tipo $0 \,.\, x = 2$ la cual es un absurdo para todo valor de *x*.

CAPÍTULO 9:

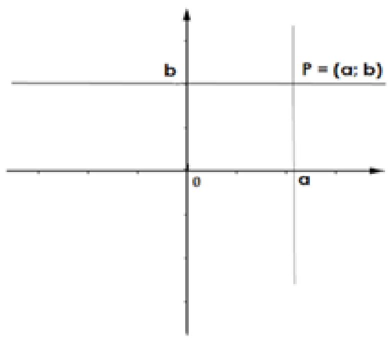
Funciones

Sistemas de coordenadas rectangulares

En el plano, se grafican dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersectan en los puntos ceros de las dos rectas. A las rectas se las denomina *Ejes Coordenados* y a su intersección que se la denota con 0, se la denomina *Origen*. Por convención, la recta horizontal se llama *Eje x,* y a la recta vertical se la llama *Eje y.* Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *Cuadrantes*.



Un punto *P* en el plano, se designa por medio de una pareja de números, llamados cada uno *Coordenadas Cartesianas*. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por *P*, intersectan a los ejes *x* e *y* en *a* y *b*, respectivamente, entonces *P* tiene coordenadas (*a*; *b*); luego (*a*; *b*) es un par ordenado de números, en donde el primer número *a*, es la coordenada *x* o *Abscisa*; y el segundo número, *b*, es la coordenada *y* u *Ordenada*.



Gráfica de Ecuaciones.

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas por medio de una ecuación. La Gráfica de una Ecuación en *x* e *y* consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas (*x*; *y*) hacen verdadera la igualdad. En el dictado del curso nos va a interesar graficar ecuaciones de primer y segundo grado.

Observación: El procedimiento que se menciona a continuación sólo es válido cuando el conjunto de valores que pueden tomar *x* e *y* son los reales.

<u>Procedimientos para graficar una ecuación:</u>

1. Obtener las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.
2. Graficar estos puntos en el plano.
3. Conectar los puntos con una curva suave.

Ejemplo: Grafiquemos la ecuación:

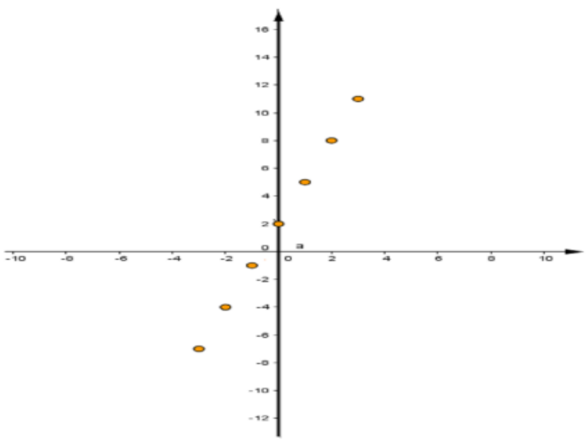
$$y = \underbrace{3}_{\text{Pendiente}}x + 2$$

ordenada al origen
(Intersección en el eje y)

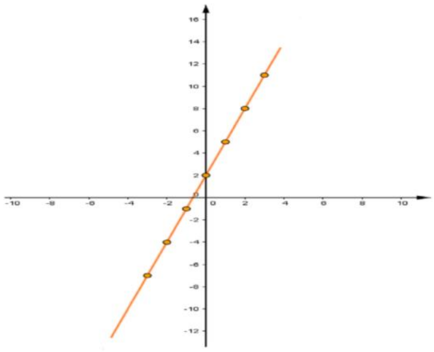
1. El primer paso que vamos a realizar es construir una tabla de valores para determinar las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.

x	$y = 3x + 2$	$P = (x;\ y)$
-3	$y = 3(-3) + 2 = -7$	$(-3;\ -7)$
-2	$y = 3(-2) + 2 = -4$	$(-2;\ -4)$
-1	$y = 3(-1) + 2 = -1$	$(-1;\ -1)$
0	$y = 3(0) + 2 = 2$	$(0;\ 2)$
1	$y = 3(1) + 2 = 5$	$(1;\ 5)$
2	$y = 3(2) + 2 = 8$	$(2;\ 8)$
3	$y = 3(3) + 2 = 11$	$(3;\ 11)$

2. Graficamos los puntos obtenidos de la tabla



3. Unimos los puntos con una curva suave:



Observación: Cuantos más puntos se grafiquen, mejor va a poder ser la realización de la gráfica, pues la idea es guiarse uniendo estos puntos para su construcción.

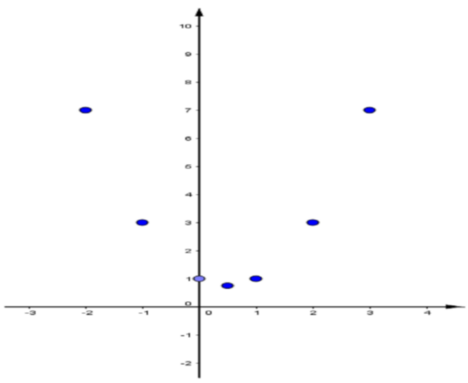
Ejemplo: Graficar la ecuación:

$$y = x^2 - x + 1$$

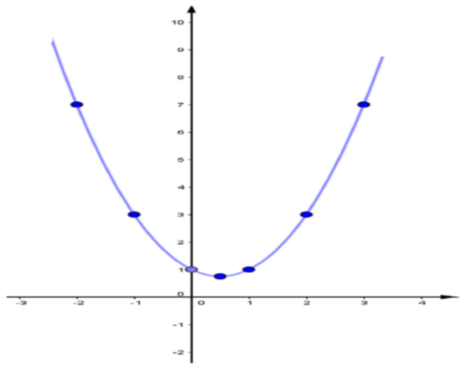
1. El primer paso que vamos a realizar es construir una tabla de valores para determinar las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.

x	$y = x^2 - x + 1$	$P = (x,\ y)$
-2	$y = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$	$(-2;\ 7)$
-1	$y = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$	$(-1;\ 3)$
0	$y = (0)^2 - (0) + 1 = 1$	$(0;\ 1)$
$\frac{1}{2}$	$y = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}) + 1 = \frac{3}{4}$	$(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4})$
1	$y = (1)^2 - (1) + 1 = 1$	$(1;\ 1)$
2	$y = (2)^2 - (2) + 1 = 3$	$(2;\ 3)$
3	$y = (3)^2 - (3) + 1 = 7$	$(3;\ 7)$

2. Graficamos los puntos obtenidos de la tabla, en el plano:



3. Unimos los puntos con una curva suave:



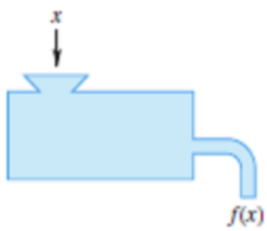
Observación: Al observar de los ejemplos, la tabla de valores realizada para graficar a la ecuación, como así también la representación gráfica de las mismas; se ve que en ambas se expresa una relación entre dos magnitudes, *x* e *y*. La relación entre estas variables es la siguiente: *a cada valor de la variable x, le corresponde un único valor de la variable y. De aquí que se la denomina variable dependiente y a x variable independiente*. Esta relación define el concepto de función. A la expresión general de la ecuación de una función se la denota:

$$y = f(x).$$

Antes de empezar a hablar del concepto de función, entendamos qué se entiende por relación. A las relaciones las encontramos por todos lados, por ejemplo, la relación entre horas que pasa un estudiante con el celular y sus notas en el colegio, pues si están muchas horas frente al celular, sus notas bajarán. Otra relación que podemos ver es entre las preguntas contestadas en un examen y la nota obtenida, pues a más respuestas correctas, mayor será la nota. También otra relación que podemos encontrar a diario, es cuando vamos a hacer las compras y lo que vamos a pagar por ello, por ejemplo, si compramos tres gaseosas, cuyo valor de cada una de ellas es de $60, vamos a pagar $180; la relación estaría entre la cantidad de gaseosas y el valor a pagar por ellas; y así podemos encontrar infinidad de ejemplos y de aquí la gran importancia de este tema.

Definición: Dados dos conjuntos *A* y *B*, una función de *A* en *B* es una regla de correspondencia o relación entre ambos conjuntos, que asocia a cada elemento *x* del conjunto *A* uno y solo un elemento del conjunto *B*. El conjunto *A* se llama *conjunto de partida o dominio* de *f*, el conjunto *B* se denomina *conjunto de llegada o codominio* de *f*.

Para entender mejor el tema, pensemos en una función como una máquina que toma como entradas un valor *x* y produce una salida *f(x)*. Cada valor de entrada se hace corresponder con *un solo* valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.

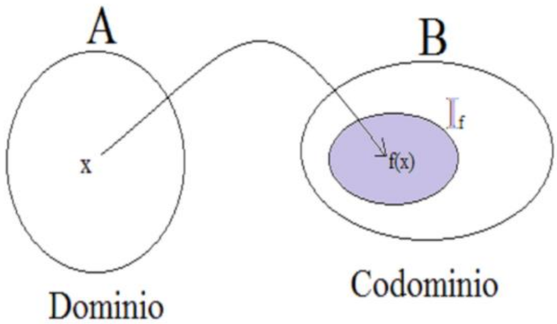


La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del codominio. Por ejemplo, el dominio podría consistir en el conjunto de personas en un curso de Análisis, el codominio es el conjunto de las calificaciones que se obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones; o como vimos en uno de los ejemplos anteriores de relaciones, el dominio puede ser las horas que el estudiante pasa frente al celular, el codominio el conjunto de calificaciones y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. De acuerdo a la definición anterior, para cada elemento *x* del dominio de *A* la función *f* le hace corresponder un único elemento en el codominio de *B*; a este elemento lo denotamos *f(x)*. Al conjunto de todos los valores *f(x)* pertenecientes a *B*, con *x* perteneciente al dominio *A* de la función, se lo denomina conjunto imagen, rango o recorrido de f y lo denotaremos I_f.

Notación. Usaremos la siguiente notación para denotar "*f* es función de *A* en *B*".

$$f: A \rightarrow B$$

Siendo *A* el dominio y *B* el codominio.



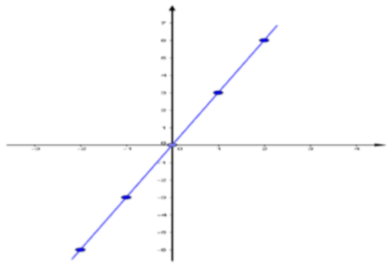
Observación: Una función puede expresarse mediante un texto, una expresión algebraica, una tabla de valores o bien por medio de un gráfico. A lo largo del curso, nos va a interesar graficar funciones lineales y cuadráticas.

Función lineal.

Definición: Una función lineal, es una función que se puede expresar como una ecuación que tiene la siguiente forma: $f(x) = mx+b$ donde *m* y *b* son constantes reales y *x* es una variable real. Su nombre, función lineal, se debe a que gráficamente en el plano representa a una línea recta. Notaremos a estas funciones de la forma $f: R \rightarrow R$, lo cual indica que el dominio y la imagen de la misma es el conjunto de los números reales.

Ejemplo: Representemos gráficamente a la ecuación lineal $y = 3x$. Primero realizamos una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

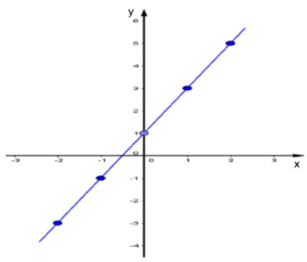
x	$f(x) = 3x$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6



Observación: Al observar el gráfico se puede concluir que la recta pasa por el origen y a medida que *x* se mueve un lugar a la derecha, y se mueve tres lugares hacia arriba.

Ejemplo: Representemos gráficamente a la función lineal $y = 2x + 1$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

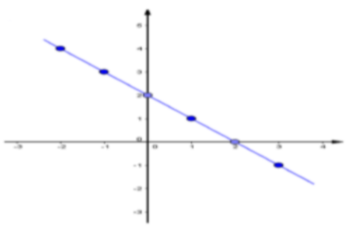
x	$y = 2x + 1$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Observación: Al observar la gráfica concluimos que la recta corta al eje *y* en 1, y luego desde ahí cuando corre un lugar a la derecha en *x*, sube dos lugares, es decir se mueve dos lugares hacia arriba en *y*.

Ejemplo: Representemos gráficamente a la función lineal $y = -x + 2$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

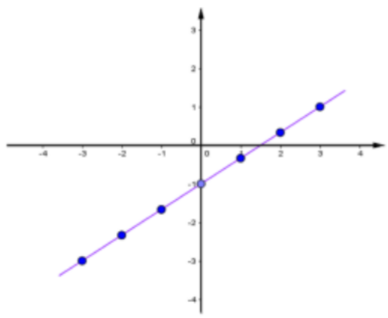
x	$f(x) = -x + 2$
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1



Observación: Observando el gráfico concluimos que la recta intersecta al eje *y* en 2, y que por cada un lugar que se mueve con respecto al eje *x*, baja un lugar con respecto al eje *y*.

Ejemplo: Representemos gráficamente a la función lineal $y = \frac{2}{3}x - 1$. Nuevamente, se realiza primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego se ubican los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

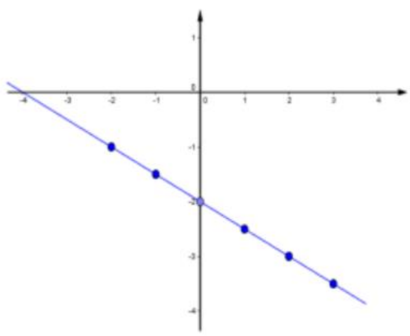
x	$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$
-3	-3
-2	$-\frac{7}{3}$
-1	$-\frac{5}{3}$
0	-1
1	$-\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	1



Observación: Al observar la gráfica concluimos que la recta intersecta al eje *y* en −1, y que por cada tres lugares que se mueve con respecto al eje *x*, sube dos lugares con respecto al eje *y*.

Ejemplo: Representemos gráficamente a la función lineal $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

x	$f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$
-2	-1
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-2
1	$-\frac{5}{2}$
2	-3
3	$-\frac{7}{2}$

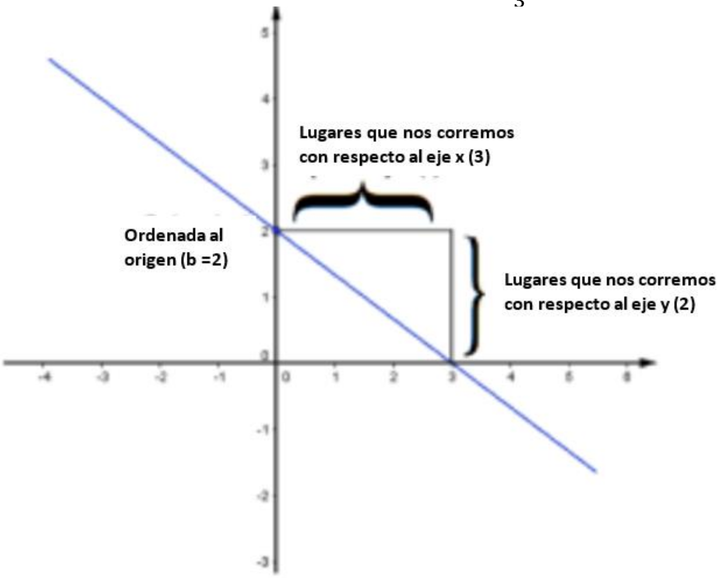


En la gráfica concluimos que ésta intersecta al eje *y* en −2, y que cuando se mueve dos lugares con respecto al eje *x*, se mueve uno hacia abajo con respecto al eje *y*.

Al observar las gráficas de las distintas rectas y las observaciones obtenidas, concluimos que la recta corta al eje *y* en el término independiente que se corresponde al valor de *b* en la expresión general de la función lineal. A este valor se lo denomina *Ordenada al Origen*. Luego a partir de este valor, la recta se mueve a la derecha en *x* tantos lugares como indica el valor del denominador del coeficiente que acompaña a *x*, y de ahí la recta va a subir tantos lugares como indica el numerador del coeficiente que acompaña a la *x*; ojo, subimos en el caso de que el signo del coeficiente de *x* es positivo, en el caso de que fuera negativo se debe bajar; indicando con esto último la inclinación o pendiente de la recta. Por tal motivo al valor que acompaña a *x* se lo denomina *Pendiente.* Generalizando, dada la función lineal f(x) = *mx* + *b* tenemos que:

b = Ordenada al origen, que indica el valor que intersecta al eje *y*.
m = Pendiente de la recta, que indica la inclinación de la misma.

Ejemplo: Representemos gráficamente la recta f(x) = $-\frac{2}{3}x + 2$.

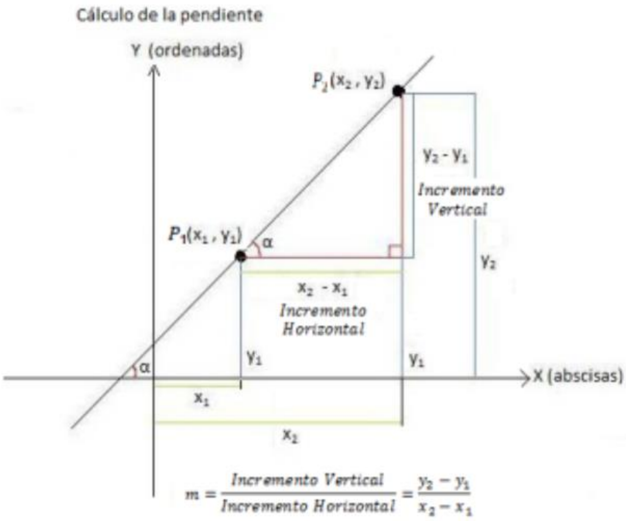


Observación: Cabe destacar que en el transcurso de esta sección se ha trabajado con rectas cuyas pendientes eran números racionales, en caso de tener una recta cuya pendiente resulte un número irracional se graficará a la misma siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

1. Encontrar dos puntos que verifiquen la ecuación de la recta.
2. Ubicar los dos puntos hallados en 1. en un sistema de ejes coordenados.
3. Unir los puntos con una recta.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Como ya se ha mencionado la pendiente de una recta se interpreta como la razón del incremento vertical con respecto al incremento horizontal, entonces dados dos puntos por los que pasa la recta, podemos determinar su pendiente. Su interpretación gráfica es la siguiente:



De esta manera dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ la ecuación de
la recta que pasa por los mismos es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

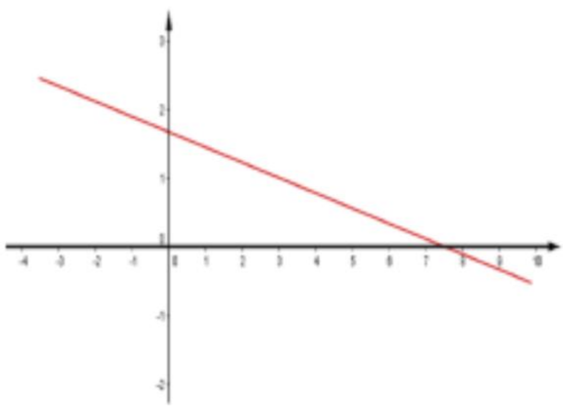
Ejemplo: Determinemos la recta que pasa por los puntos P = $(0;\frac{5}{3})$ y Q = (3; 1). Aplicando la ecuación anterior:

$$y - \frac{5}{3} = \frac{1 - \frac{5}{3}}{3 - 0}(x - 0)$$

$$\rightarrow y - \frac{5}{3} = \frac{\frac{-2}{3}}{3}x$$

$$\rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$$

La representación gráfica de la misma es:



Ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada.

De la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, vimos que la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces haciendo este reemplazo en la ecuación $y - y_{1=}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$ se obtiene la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada. Esta es:

$$y_{1=m(x-x_1)}$$

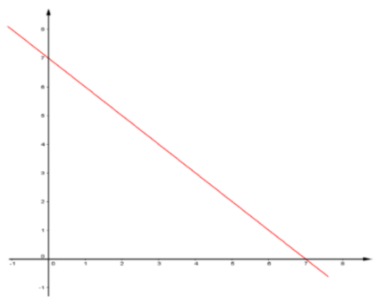
Con m la pendiente dada y (x_1, y_1) el punto por el que pasa la recta.
Ejemplo: Determinemos la ecuación de la recta de pendiente $m = -1$ que pasa por el punto (2; 5). Aplicando la fórmula anterior nos queda:

$$y - 5 = -1(x - 2)$$

$$\rightarrow y = -x + 2 + 5$$

$$\rightarrow y = -x + 7$$

Representación gráfica:

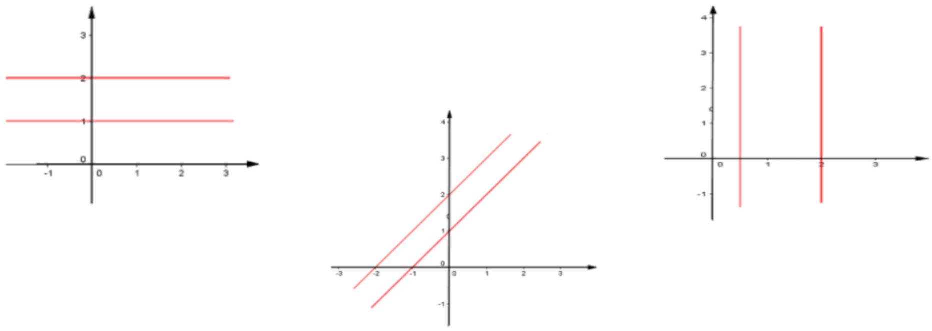


Rectas paralelas y perpendiculares

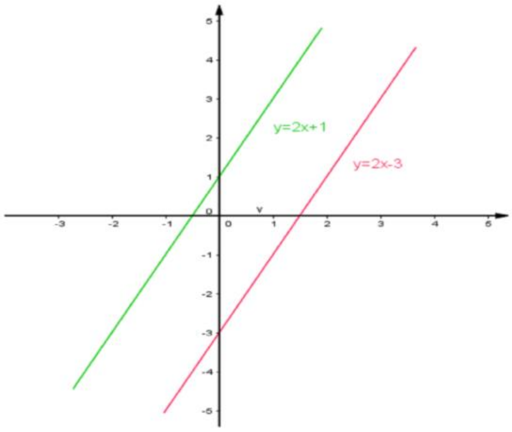
Cuando representamos gráficamente dos ecuaciones lineales en el mismo sistema de ejes cartesianos existen tres posibilidades de acuerdo a la disposición de las mismas en el plano:

1. Las ecuaciones tienen la misma gráfica, y se corresponden a rectas coincidentes.
2. Las gráficas se intersectan en un punto, y se corresponden a rectas incidentes.
3. Las gráficas corresponden a rectas paralelas.

Dos rectas son paralelas cuando sin ser coincidentes, gráficamente no se cortan en ningún punto del plano y para que ello ocurra deben de tener la misma pendiente.

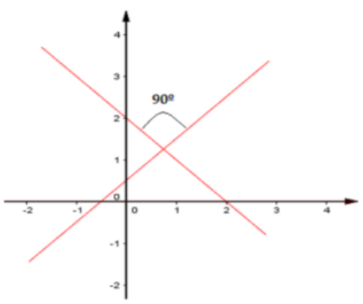


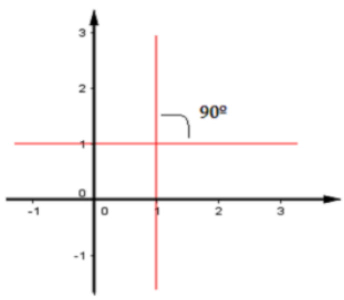
Ejemplo: La recta $y = 2x - 3$ es paralela a la recta $y = 2x + 1$ pues tienen la misma pendiente, 2. La representación gráfica de ambas rectas es:



Dos rectas son perpendiculares cuando gráficamente forman un ángulo recto (ángulo de 90°). Esta situación se presenta en los siguientes casos:

1. Si l_1 y l_2 son rectas oblicuas cuyas respectivas pendientes m_1 y m_2 cumplen con que $m_1.m_2 = -1$.
2. Si una recta es horizontal y la otra es vertical.





Observación**.** El producto m1.m2 = −1, es equivalente a $m_1 = \frac{-1}{m2}$ o $m_2 = \frac{-1}{m1}$; entonces podemos concluir que dos rectas oblicuas son perpendiculares cuando la pendiente de una de ellas es la inversa y opuesta de la otra.

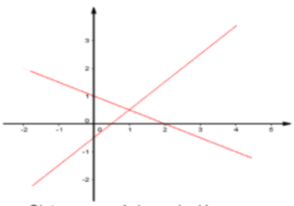
Ejemplo: Si la pendiente de una de las rectas es $m_1 = -\frac{3}{4}$, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m_2 = \frac{4}{3}$.

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

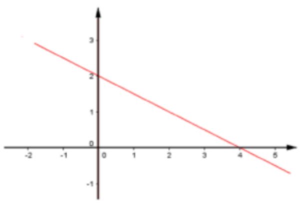
Definición: Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, es un conjunto de dos ecuaciones que puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

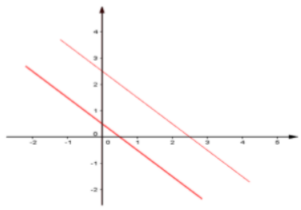
Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son constantes reales con $a_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ o bien $a_2 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$. Estas restricciones aseguran que ambas variables figuren en el sistema y que haya por lo menos una variable en cada ecuación.
Los números a_1, a_2, b_1 y b_2 se llaman Coeficientes del sistema y los números c_1 y c_2 son los términos independientes. El conjunto Solución del sistema es el conjunto de pares ordenados (x; y) que verifican ambas ecuaciones. Como las ecuaciones que componen el sistema son lineales, la gráfica de cada una de ellas es una recta. De esta manera de acuerdo a la posición relativa de dos rectas, se da la clasificación de cada sistema.



Sistema con única solución



Sistema con infinitas soluciones

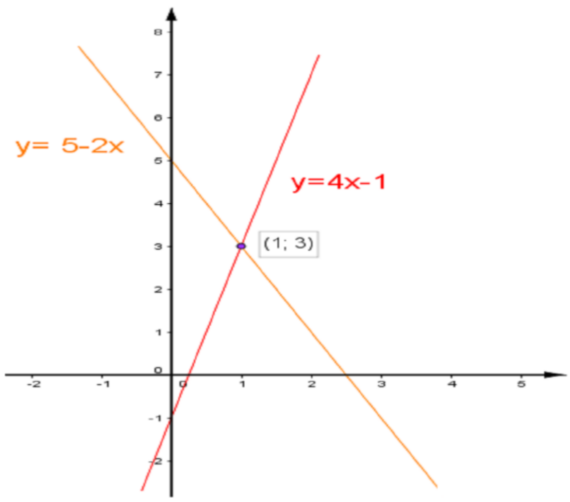


Sistema sin solución

Ejemplo: Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

Representando ambas ecuaciones lineales en el mismo sistema de ejes cartesianos:



Concluimos que como se intersectan en un punto, el sistema tiene una única solución; y es: S = {(1; 3)}

Este método gráfico de resolver un sistema de ecuaciones, no siempre es el más conveniente, es por eso que existen otros métodos que nos permiten resolver cualquier sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Métodos de resolución de sistema de ecuaciones:

Existen por lo menos tres métodos de resolución de sistemas de ecuaciones: método de sustitución, método de igualación y método de reducción por sumas y restas. Nosotros en este curso utilizaremos el método de sustitución. No quiere decir que no se pueda utilizar los otros métodos.

Método de Sustitución: Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las ecuaciones, para luego sustituirla en la otra ecuación; obteniéndose un sistema equivalente donde una de las ecuaciones depende de una variable.

Ejemplo: Consideramos el sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \textit{(i.)} \\ 4x - y = 1 & \textit{(ii.)} \end{cases}$$

Para resolverlo por este método, lo primero que debemos hacer, es despejar una de las variables de una de las ecuaciones; supongamos que despejamos *y* de la ecuación *(i.)*

$$2x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 2x \ \textit{(iii.)}$$

Luego sustituimos este valor de *y* en la ecuación *(ii.)*

$$4x - (5 - 2x) = 1$$

Nos queda entonces una ecuación de una variable, x; resolvámosla para poder determinar la solución del sistema:

$$4x - (5 - 2x) = 1 \rightarrow 4x - 5 + 2x = 1$$

$$\rightarrow 6x = 1 + 5 \rightarrow x = 1$$

Entonces reemplazando por este valor en (*iii.*)

$$y = 5 - 2(1) \rightarrow y = 3$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$S = \{(1; 3)\}$$

solución que coincide con la obtenida por el método de resolución gráfico.

Situaciones problemáticas

En muchas situaciones problemáticas se requiere del planteo de un sistema de ecuaciones para su resolución.

Ejemplo: En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas de estos animales son 50, y si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Resolución: Como el problema nos pregunta cuántos animales de cada clase hay, las incógnitas van a representar a la cantidad de animales, es decir, por ejemplo, podemos suponer que la variable x representa la cantidad de conejos y la variable y representa a la cantidad de gallinas. Luego con los datos del problema armamos las ecuaciones del sistema:

$$x + y = 50 \text{ (i.)}$$

$$4x + 2y = 134 \text{ (ii.)}$$

Una vez planteado el sistema de ecuaciones debemos resolverlo por alguno de los métodos de resolución. ¿Te animas a encontrar el resultado?

Respuesta: Hay 17 conejos y 33 gallinas.

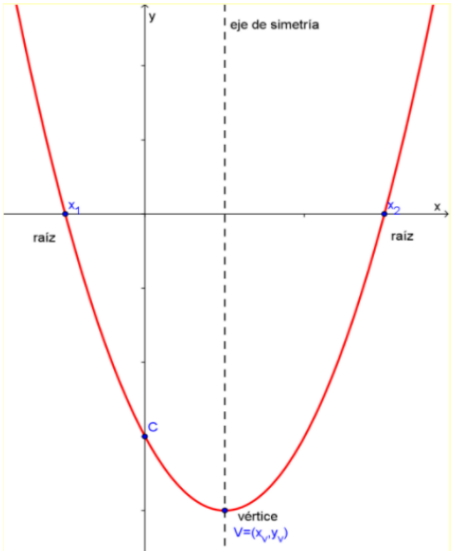
Otro ejemplo para que resuelvas

En una alcancía hay 50 monedas y un total de \$400. Si sólo hay monedas de \$5 y de \$10, ¿Cuántas monedas de \$5 y de \$10 hay en la alcancía?

Respuesta: Hay 20 monedas de \$5 y 30 monedas de \$10 en la alcancía.

Función cuadrática.

Definición: se llama función cuadrática a la función que se puede expresar como una ecuación que tiene la siguiente forma: $f(x) = ax^2+bx+c$. En este caso, a, b y c son los términos de la ecuación y pueden tomar cualquier valor real, pero a siempre debe de ser diferente de 0. El término ax^2 es el término cuadrático, mientras que bx es el término lineal y c, el término independiente. Cuando están presentes todos los términos, se habla de una ecuación cuadrática completa. En cambio, si falta el término lineal o el término independiente, se trata de una ecuación cuadrática incompleta. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y la gráfica de la misma es una parábola.

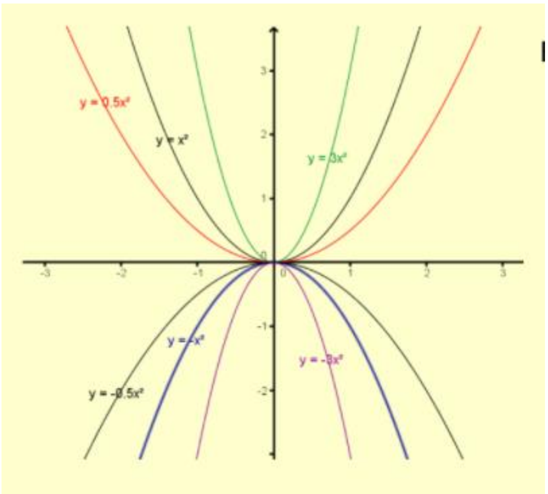


Parábolas del tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Cada uno de los lugares en los que la gráfica corta el eje x se conoce como *raíz*.

El *vértice* es el punto en el cual la gráfica alcanza su valor mínimo (o máximo).

El *eje de simetría* es una recta que permite observar claramente que las parábolas son curvas simétricas.

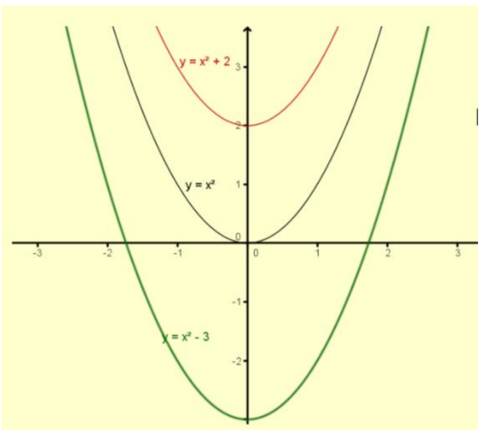


Parábolas del tipo $y = ax^2 + c$, $a \neq 0$ y $c \neq 0$.

Al observar la gráfica concluimos:

i. Cuando $|a| > 1$ la curva se acerca al eje *y* (eje de simetría). Cuando $|a| < 1$ se aleja del eje *y*.

ii. Cuando $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba. Cuando $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

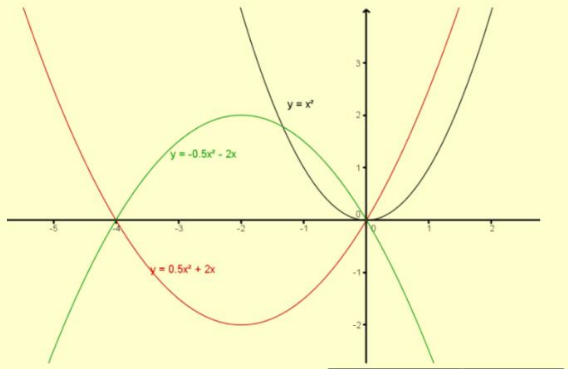


En la gráfica se puede observar que si:

$c > 0$ la parábola se desplaza hacia arriba.

$c < 0$ la parábola se desplaza hacia abajo.

- Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx$



En la gráfica se puede observar que si:

✓ ***a*** y **b** tienen el mismo signo, la parábola se desplaza hacia la izquierda.

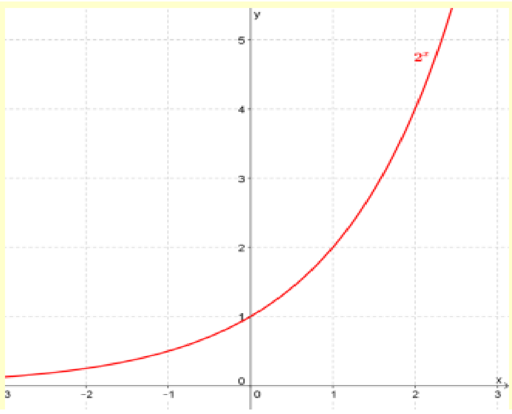
Funciones exponenciales.

Dado *b* > 0, la función exponencial de base *b* está definida por

$$f(x) = b^x$$

para $b \neq 1$, el dominio de *f* es R y el comportamiento de *f* es muy distinto según sea b > 1 o b < 1.
Analicemos la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de *b*.
Si *b* > 1, por ejemplo, *b* = 2, la función $y = 2^x$ es *creciente*.

x	y=f(x)
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

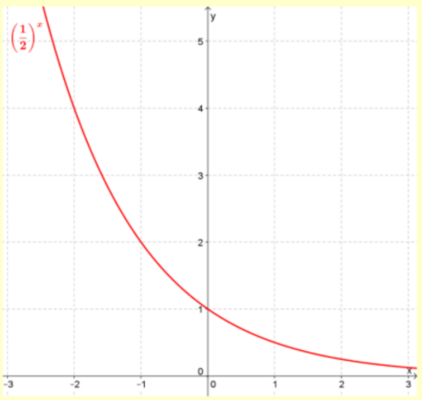


Observemos que...

Cualquiera sea el valor de *b* > 1, el dominio son todos los reales y la imagen son los reales positivos. La gráfica de la función exponencial debe pasar por el punto (0;1), ya que es el valor de la ordenada al origen; es decir el valor que toma la función para x = 0. Por otro lado es claro que a medida que el valor de x aumenta, el valor de b^x también, luego la función es creciente y si el valor de *x* decrece (con valores negativos) entonces el valor de b^x tiende a 0, por lo que el eje *x* es una *asíntota horizontal*.

Si $0 < b < 1$, por ejemplo $y = (\frac{1}{2})^x$ la función es decreciente.

x	y=f(x)
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Observemos que...

Cualquiera sea el valor de $0 < b < 1$, la gráfica de la función pasa por el punto (0;1). Por otro lado, a medida que el valor de x aumenta, el valor de b^x decrece y la gráfica tiende a $y = 0$ cuando x crece indefinidamente y de nuevo el eje x es una asíntota horizontal.

En cualquiera de los dos casos la gráfica nunca toca al eje x, debido a que $b^x > 0$ para todo x. De este modo para $b \neq 1$ la función exponencial $f(x) = b^x$ tiene dominio R e imagen $(0, \infty)$.

La función exponencial sirve para describir el crecimiento exponencial en muchos campos de la ciencia y la tecnología. Por ejemplo, la reproducción de una colonia de bacterias, la desintegración de una sustancia radioactiva, algunos crecimientos demográficos, la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, la ley que rige el enfriamiento de un objeto en un ambiente con menor temperatura, etc.

Ejemplo: Las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Proponemos calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas:

Tiempo (hs)	1	2	3	4	5	6	7	…	x
Nro. de amebas	2	4	8					…	2^x

El número total al cabo de x horas será $y = 2^x$

Si al comienzo del proceso había k amebas, y en la primera hora se duplican, entonces ahora hay $2k$. En la segunda hora se vuelven a duplicar, es decir, hay $2\,(2k) = 2^2 k$, en la tercera hora se repite la situación y tenemos $2(2^2 k) = 2^3 k$, etc. Luego en general se tiene que el número total sería: $y = k\,2^x$

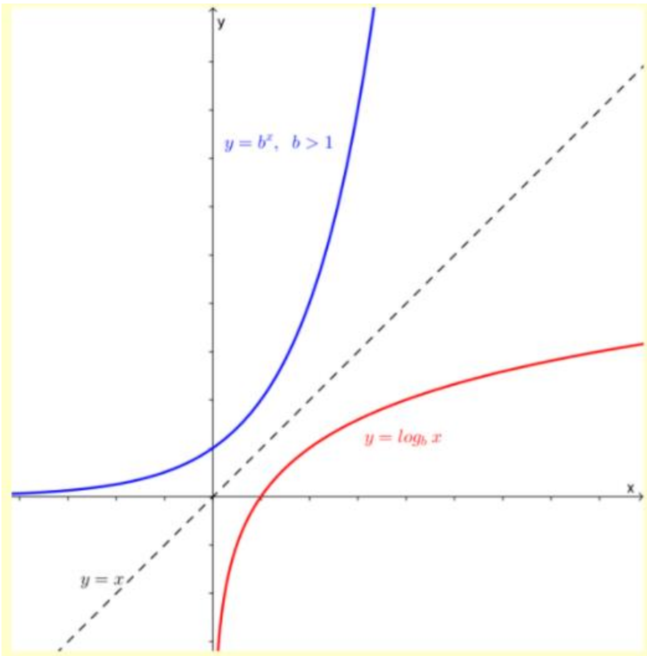
¿Qué pasa si ahora queremos hallar el tiempo x en el cual el número de amebas existente "y" es conocida? Posteriormente estudiaremos este tipo de ecuaciones resultantes. Antes veamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo: $5^{(3-x)} = 125$ que podemos escribir también en la forma $5^{(3-x)} = 5^3$ teniendo en cuenta que, si las bases son las mismas en una igualdad, entonces los exponentes deben ser iguales, es decir, $3 - x = 3$. Luego, $x = 0$.

Función logarítmica. Logaritmos.

Toda función exponencial $f(x) = b^x$, con $b > 0$, $b \neq 1$, es una función biyectiva y, por lo tanto, tiene una función inversa la cual se conoce como función logarítmica. La función inversa se conoce como la función logaritmo con base b y se denota como log_b

Es simétrica de la función exponencial con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Esto nos lleva a la siguiente definición:

LOGARITMO EN BASE b: Sea b un número positivo con $b \neq 1$ e $y > 0$, llamaremos logaritmo de y en base b al único número x que verifica $b^x = y$. Es decir,

$$log_b\, y = x \Leftrightarrow b^x = y$$

Observación:

b: base del logaritmo, debe ser $b > 0$ y $b \neq 1$.

y: argumento del logaritmo, debe ser $y > 0$.

Ejemplos:

- $\log_2 128$

$\log_2 128 = x \quad \Leftrightarrow 2^x = 128 = 2^7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$

- $\log_6 1 = 0$ porque $6^0 = 1$

El *logaritmo decimal* es el logaritmo de base 10, y se conoce como logaritmo común y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

El *logaritmo neperiano o natural* es el logaritmo cuya base es el número e ≅ 2,7182 y se denota $\log_e x = \ln x$. La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Por la definición de función inversa tenemos

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Propiedades de los logaritmos.

Sea b un número positivo, con $b \neq 1$, sean $x > 0$, $y > 0$ y c, números reales cualesquiera.

- *El logaritmo de 1 en cualquier base es igual a cero.* $\log_b 1 = 0$

Ejemplo: $\log_2 1 = 0$, ya que $2^0 = 1$.

- *El logaritmo de la base es 1.* $\log_b b = 1$

Ejemplo: $\log_4 4 = 1$, ya que $4^1 = 4$.

- *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores*

  $\log_b (x \,.\, y) = \log_b x + \log_b y$

Ejemplo:

$\log_3 (3 \cdot 9) = \log_3 27 = 3$

$\log_3 3 + \log_3 9 = 1 + 2 = 3$

- *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Ejemplo:

$\log_3 \left(\frac{81}{9}\right) = \log_3 9 = 2$

Y, por otro lado, $\log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$.

- *El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base*

$$log_b (x^c) = c \cdot log_b\, x$$

Ejemplo:

$log_2 8^3 = log_2 512 = 9$ pues $2^9 = 512$

y $3 \cdot log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$

- *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido por el índice de la raíz*

$$\log \sqrt[n]{B} = \frac{1}{n} log \text{ B} = \frac{logB}{n}$$

Ejemplo:

$log_2 \sqrt[3]{8} = \frac{1}{3} log_2 8 = \frac{3}{3} = 1$

RECORDAR: El logaritmo no es distributivo con respecto a la suma, resta, producto y cociente.

$$\log (A + B) \neq \log A + \log B$$
$$\log (A - B) \neq \log A - \log B$$
$$\log (A . B) \neq \log A . \log B$$
$$\log (A / B) \neq \log A / \log B$$

Cambio de base.

Para algunos fines resulta útil cambiar de logaritmos con una base a logaritmos con otra. Si, por ejemplo, tuviéramos que calcular $\log_2 3$, usando logaritmos decimales (Uno de los disponibles en las calculadoras). Llamamos *y* al logaritmo que queremos calcular. En este caso

$$y = log_2 3$$

Por definición de logaritmo tenemos $2^y = 3$. Luego, aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros y por las propiedades de logaritmo obtenemos

$$y \log 2 = \log 3,$$

finalmente

$$y = \frac{log\ 3}{log\ 2} \cong 1{,}5849$$

El procedimiento general considerando que se nos da $log_a\, x$ y deseamos determinar el valor de $log_b\, x$ es:

$$y = log_b\, x$$

Escribimos lo anterior en forma exponencial y tomamos el logaritmo con base a en ambos miembros

$$b^y = x$$
$$\log_a(b^y) = \log_a x$$
$$y \cdot \log_a b = \log_a x$$
$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Si se quiere cambiar de log a ln o viceversa

Entonces $\log_e X = \log_{10} X / \log_{10} e$
ln X = log X / log e
ln X = log X / log 2,7182

$$In\ x = log\ log\ x / 0{,}4343 \{ In\ x = 2.303\ log\ log\ x \quad log\ log\ x = 0{,}4343\ In\ x$$

Ecuaciones exponenciales.

A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama *ecuación exponencial*.

Resolveremos ecuaciones complejas utilizando las propiedades del logaritmo. Por ejemplo:

$$2^x = 7$$

Para encarar este problema donde la variable figura como exponente, tomamos logaritmo a ambos lados y después usamos las propiedades de los logaritmos para "bajar la x" del exponente

$$\ln 2^x = \ln 7$$
$$x \ln 2 = \ln 7$$

Se despeja *x*

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$$
$$x \cong 2.807$$

Sugerencias para la resolución de ecuaciones exponenciales

1. Aísle la expresión exponencial en un miembro de la ecuación.
2. Tome logaritmo de ambos lados, y después utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

Ejemplo: Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.

$3^x . 5^{2x} = 4$

$$\log (3^x . 5^{2x}) = \log 4$$
$$\log 3^x + \log 5^{2x} = \log 4$$
$$x . \log 3 + 2\, x \log 5 = \log 4$$
$$x . 0{,}477 + 2\, x . 0{,}699 \cong 0{,}602$$
$$x . 0{,}477 + x . 1{,}398 \cong 0{,}602$$
$$x . (0{,}477 + 1{,}398) \cong 0{,}602$$
$$x . 1{,}875 \cong 0{,}602$$
$$x \cong 0{,}321$$

Ecuaciones logarítmicas.

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la cual está presente la variable logaritmo. Por ejemplo:

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar *x* utilizamos la definición de logaritmo

$$x + 2 = 2^5$$
$$x = 32 - 2 = 30$$

Los procedimientos usados para resolver este problema simple lo resumimos como sigue:

Sugerencias para resolver ecuaciones logarítmicas

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación, quizás sea necesario primero combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial, es decir usando la definición de logaritmo.
3. Despeje la variable.

Ejemplos:

- $\log_5 4x = 2$ $\qquad 4\,x = 5^2$

$$x = \frac{25}{4}$$

- $4 + 3 \log(2x) = 16$

Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permitirá escribir la ecuación en forma exponencial

$$3 \log(2x) = 12$$
$$\log(2x) = 4$$
$$2x = 10^4$$
$$x = 5000$$

- Dada la siguiente función que relaciona el crecimiento bacteriano en función del tiempo,

$$B = B_0 \cdot e^{\alpha t}$$

encontrar el tiempo t en el cual la población aumenta el doble si $\alpha = 0{,}5\ h^{-1}$.

Debo aplicar el logaritmo conveniente, entonces:

$$Ln\ B = ln\ (B_0 .\ e^{\alpha t})$$

$$\mathrm{Ln}\ (B_0 \cdot 2) = \ln B_0 + \alpha\ t \ln e$$
$$\mathrm{Ln}\ B_0 + \ln 2 - \ln B_0 = \alpha\ t$$
$$\ln 2 / \alpha = t \quad \Rightarrow t = 1{,}38 \text{ horas}$$

Algunos ejemplos

- Modelos de crecimiento : una población experimenta crecimiento exponencial, crece según el modelo $n_{(t)} = n^0 \cdot e^{r\,t}$

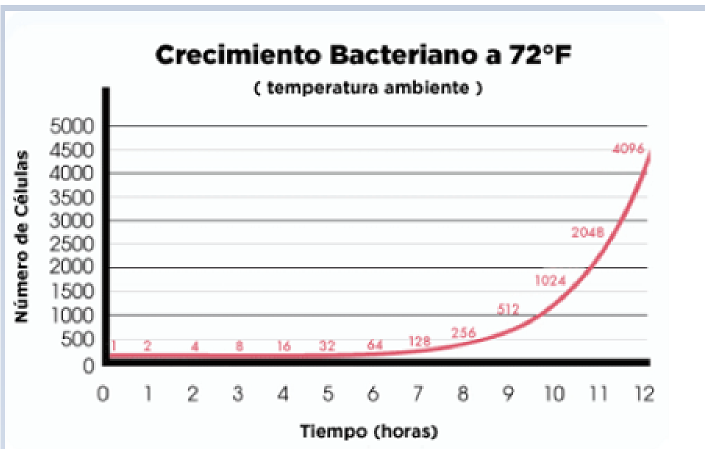
Donde $n_{(t)}$= Población en un tiempo t
n^0= tamaño inicial de la población
r = tasa relativa de crecimiento (expresada como proporción de la población)
t = tiempo

El crecimiento de una población es el aumento del número de células como consecuencia de un crecimiento individual y posterior división. Esto ocurre de una manera exponencial. El crecimiento exponencial es una consecuencia del hecho de que cada célula se divide dando dos células.

La velocidad del crecimiento exponencial se expresa como el tiempo de generación "G", y este se define como el tiempo que tarda una población en duplicarse, los tiempos de generación varían ampliamente entre los distintos microorganismos.

Crecimiento Bacteriano a 72°F

Tiempo (hora)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de células	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Número de células (en exponentes)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9



La gráfica muestra que las bacterias se duplican cada hora. Por lo tanto, por cada hora que pasa multiplicamos el número de células por 2. Este es un patrón denominado crecimiento exponencial.

Por ejemplo, después de 1 hora tenemos 2 células. A las 2 horas, las células se han duplicado, y ahora tenemos 2 × 2 = 4 células.

Por lo tanto, se puede decir que a las 2 horas hay 4, o 2^2 células. El patrón sigue: a las 3 horas tenemos 2^3 células, y así sucesivamente, tal como se ve en la última fila de la tabla.

CAPÍTULO 10

Ejercicios

Conjuntos numéricos:

Operaciones con números naturales:

En “El hombre que calculaba”, puede leerse:

> *Empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera... Y antes de que le interrogara sobre aquel enigma, Beremiz explicó mientras escribía en la arena fina que cubría el suelo:*
>
> - *¿Quieres formar el cero? Pues nada más sencillo. Basta escribir:*
>
> *44-44*

A) Expresar, en operaciones algebraicas que involucran cuatro cuatros, los primeros 10 números naturales:

1 =

2 =

3 =

4 =

5 =

6 =

7 =

8 =

9 =

10 =

B)Dadas las siguientes fracciones:

1) Ordenar de forma creciente las fracciones.
2) Hallar la expresión decimal de cada una: (utilizar tres decimales)

a) 3/5 =
b) 3/40 =
c) 153/4 =
d) -4/9 =
e) 25/6 =
f) -5/18 =
g) -1/100 =
h) -1/30 =
i) 3/7 =

Cálculos porcentuales

1) ¿Cuánto es el 16% de 16.000?

2) Si un producto de limpieza mata el 99,9 % de las bacterias, ¿Cuántas bacterias matará si se aplica en una superficie de una mesada que presenta 870.000.000 de bacterias?

3) En 2021 esta fue la inflación en los distintos países:

Francia ……………………………………….. 3,4 %
España ……………………………………….. 5,6 %
Estados Unidos ……………………………… 7 %
Brasil …………………………………………. 10,06 %
Angola ……………………………………….. 30 %
Argentina …………………………………….. 45,4 %
Venezuela ………………………………….. 668,4 %

¿Cuál va a ser la variación en precio en moneda local de cada país de un alimento que a principio de año costaba $7,80? Realizar el cálculo sin considerar las variaciones de valor que hay entre las monedas de cada país.

4) Una Agroindustria del rubro lácteo, ubicada en la zona de Trenque Lauquen, le paga $15 el litro de leche a los productores tamberos. De acuerdo a la cantidad de proteínas se puede bonificar en un % 5 más por litro.

Si un productor le vende 5000 litros y recibe tal bonificación, ¿cuál sería el monto a cobrar?

5) Entre los juegos de azar la ruleta es uno de los más conocidos en los casinos. La ruleta europea posee una numeración del 0 al 36 en donde los jugadores pueden realizar sus apuestas. Un apostador cubrió con sus fichas casi todos los números del paño dejando solo 3 números libres a los cuales no apostó. ¿Qué porcentaje de chances tiene de ganar en esa tirada?

6) El panadero del almacén del pueblo produce 35 Kg. de pan por día de semana para lo cual le coloca un 0,3 % del total de la preparación de un ingrediente saborizante y colorante. ¿Cuántos gramos de ese ingrediente tendrá que colocar si esperan el próximo Domingo producir 3 veces más pan?

7) En la pollería del barrio el kilogramo de supremas está a $650, este fin de semana lanza una oferta de 5 Kg. a $3.000. ¿Cuánto porcentaje se va a ahorrar una persona que lleve la oferta?

8) Un concesionario tiene 120 autos, el 35 % de ellos son blancos y el 5 % rojos. ¿Cuántos autos de cada color hay?

9) Una marca conocida de camionetas produjo en Argentina en el año 2015 560.000 vehículos, realizó una sola producción en el mes de febrero para vender a lo largo de 5 años. Ese mismo año se vendió el 37 %. En 2016 se vendió el 25 % de las que quedaban en stock. En 2017 un 16 %. En 2018 un 45,1 %. En 2019 un 22,999 %. En 2020 un 75 %.

¿Cuántas camionetas se vendieron cada año y cuántas quedaron en stock al comienzo del 2021?

10) Un veterinario formula una ración para novillos de 300 kg que se quieren terminar en 450kg. Si el consumo de materia seca del animal (CMS) es del 2,7% del peso vivo (PV) diario, ¿Cuántos kg de ración debería suministrarle por día? Si la ración cuenta con el 15% del CMS en rollo de alfalfa y 1,08 kg de pellet de girasol. ¿Cuál es la composición en kg y porcentual de la ración si también comprende grano de maíz?

11) Para congelar semen bovino se utiliza un diluyente que se prepara en el momento de realizar la extracción de semen. Para ello se necesita el diluyente comercial, agua pura estéril y yema de huevo, con los que se logran 1250 ml de solución final. La fórmula es la siguiente: 3/5 de diluyente comercial en un matraz al que se le agregan 1/5 de agua y se mezcla. A esto se lo conoce como solución madre, a la que por último se le agrega 1/5 de yema de huevo. ¿Cuál es la composición porcentual de la solución final del preparado? ¿y en ml?

12) En un rodeo de 3000 animales contraen una enfermedad 180 ¿Qué porcentaje del total representan los animales enfermos?

Potenciación:

1. $10^{-\frac{1}{6}} . 10^{\frac{2}{3}} . 10^{-\frac{1}{2}} =$

2. $10^{\frac{1}{4}} . 10^{-\frac{1}{4}} =$

3. $\frac{x}{3} = 2 . 10^{-5} . 10^{-6} =$

4. $\frac{2}{x} = \frac{5 . 10^{-2} . 10^{3}}{10^{9}} =$

5. $\frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{x . 10^{-3}}{10^{2} . 10^{-8} \cdot 10^{6}} =$

6. $\frac{2 . 10^{-9}}{3} = \frac{5 . 10^{-2} . 10^{2} . 10^{3}}{x\,(-3)} =$

7. $\frac{10^{-\frac{3}{4}} . 10^{\frac{3}{4}}}{x\,(-1)} = \frac{5 . 10^{-8}}{10^{-3} . 10^{2}} =$

8. $\frac{3{,}9 . 10^{-1} . 10^{-6}}{1{,}3 . 3 . 10^{-5} . 10^{-1}} = x$

9. $\frac{4 . 10^{-2} \cdot 2 . 10^{-1} . 10^{-5}}{24} = 25 . 10^{-9}$

10. $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} . 2 . 10^{-7}}{10^{-8} . 10}$

11. $\frac{2{,}4 . 10 . 10^{-1}}{24 . 10^{-2}} = x$

12. $\frac{5{,}6}{8x} = \frac{10^{2} . 10^{-8} . 10^{-7}}{2 . 10^{-3}}$

13. $\frac{3 . 10^{-9}}{\frac{1}{3}} = \frac{x}{2 . 10^{-2}}$

14. $\frac{1}{4}x = 4 . 10^{-5}$

15. $\frac{5 . 10^{-8} . 10^{-9}}{10^{-17}} = \frac{10^{34} . 10^{-1}}{2 . 10^{-1}}$

16. $\frac{3{,}4}{1{,}7x . 2} = \frac{2 . 10^{-5}}{3 . 10^{-7} \cdot 10^{-3}}$

17. $\frac{5 . 48 . 10^{-2}}{2{,}4} = \frac{2 . 10^{-9}}{2x}$

18. $\frac{5 . 10^{-1}}{2 . 10^{-3}} = \frac{3x . 10^{-3}}{10^{-3}}$

19. $\frac{\frac{2}{3}x}{10^{-1}} = \frac{\frac{5}{2} . 10^{-2}}{10^{-2} . 10^{-1}}$

20. $\frac{x\,(-3)}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{2} . 5 . 10^{-2}}{10^{-3} . 10^{-7}}$

Notación Científica:

Expresar en notación científica con un solo dígito y en forma exponencial:

1. 0,03 =
2. $3,1.\ 10^{-2}.\ 10^{-3}$ =
3. 10^{-4} =
4. $5,8.\ 10^{-9}.\ 10^{-2}$ =
5. $48,3.\ 10^{-9}$ =
6. 563.10^{-2} =
7. una centésima:
8. 100 =
9. $0,002.\ 10^{-1}$ =
10. 57.10^{-1} =
11. $6,3.\ 10^{-2}.\ 10^{4}$ =
12. $49.\ 10^{5}$ =
13. una diez milésima:
14. $4.535.000 \times 10^{-6}$ =
15. $0,005.\ 10^{2}$ =
16. $0,08.\ 10^{-8}$ =

17. "El Coulomb (C) es la unidad (histórica) de carga eléctrica en el Sistema Internacional de Unidades, y equivale aproximadamente a $6,27 \times 10^{18}$ veces la carga del protón". (…)
- El número que compara al Coulomb con la carga del protón ¿lo considera muy grande?
- ¿Cuántos lugares corre la coma hacia la derecha para expresar el número real?
- ¿En qué tipo de notación está expresado?

18. Indica cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica, luego expresar a los restantes de cómo se expresaría en NC:

a) 583.000.000
b) $7,8 \cdot 10^{9}$
c) $0,01 \cdot 10^{9}$
d) $0,36 \cdot 10^{-12}$
e) $15,78 \cdot 10^{-5}$
f) 0,00000634

19. La luz que viaja aproximadamente a 3.0×10^{5} km por segundo, tarda cerca de 5.0×10^{2} segundos en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?

20. La fisión nuclear se utiliza como fuente de energía. ¿Sabes cuánta energía proporciona un gramo de uranio 235? La respuesta es $\frac{4,7\ .\ 10^{9}}{235}$ kilocalorías. Escríbela en notación científica.

21. La velocidad del sonido en el aire es de 3.31×10^{4} centímetros por segundo. Calcula esa velocidad en centímetros por hora.

22. Si la masa de un protón es de 0.00000000000000000000000167248 gramos, calcula la masa de un millón de protones.

Ecuaciones:

Ecuaciones de primer grado.

1. $\frac{17}{5}x = \frac{8}{5}x + 150$

2. $7(x-2) + 9 = 10x - 4(-3 - x)$

3. $\frac{1}{2}(x-5) = \frac{3}{2} + \frac{9}{6}(x-2)$

4. $\frac{\frac{1}{2}.\ 10^{-2}}{x} = \frac{10^{4}.\ 10^{3}}{\frac{1}{4}.\ 10^{-2}}$

5. $\frac{x\ .2\ .3}{6{,}9} = \frac{\frac{2}{4}.\frac{1}{3}.\ 10^{2}}{5\ .\frac{1}{5}.\ 10^{0}}$

6. $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} + \frac{2x}{15} = -3 + 7$

7. $(x-3).2 = (x-5).3$

8. $\frac{2x}{4} - \frac{5x}{8} + \frac{2x}{12} = -x - 20$

9. $\frac{1(-x-3)}{3} = \frac{1\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\right)}{4}$

10. $\frac{1}{2x} = \frac{2}{3}.\frac{1}{5}$

11. $-1 - 13 = \frac{-2x}{3} - \frac{3x}{4}$

12. $-5 = \frac{2x-6}{x+1} - \frac{4}{x+1}$

13. $\frac{5x-5}{5} = \frac{6x-6}{6\ .\ (-2)}$

14. $\frac{-2x}{3} = 1 - \frac{2x}{2}$

15. $\frac{x-1}{3} - 4 = \frac{4x-2}{8}$

16. $\frac{4x-2}{3} - 1 = \frac{x-2}{2} - \frac{x+1}{(-1)}$

17. $\frac{2}{3}x - 3 = x - \frac{8}{3}$

18. $\frac{13}{5} - x = x - 3 + \frac{5}{3}x$

19. $\frac{3}{2}x - 2 - x = -x - \frac{2}{3}x - 6$

20. $0{,}5x - \frac{2x}{3} - \frac{1x}{2} = 10$

Unidades

1) Expresar 500 mL en L.

2) Expresar 145 Km en cm.

3) Transformar 340 mg en Kg.

4) Transformar 7000 µL en dL.

5) Calcular a cuántos m equivalen 83 Dam.

6) Calcular a cuántos Kg equivalen 60 g.

7) ¿A cuántos minutos corresponden 380 segundos?.

8) ¿A cuántos segundos corresponden 3 horas?

9) Calcular la velocidad de un proyectil que se desplaza a 0,08 Km/s. Expresarla en:

a) Km/h; b) m/min; c) m/s

10) La concentración de un jarabe para la preparación de mermeladas es de 0,0006 g/L. Expresarla en:

a) ng/L; b) g/mL; c) Kg/dL

11) La superficie total de una fábrica es de 4680 m2. Expresar dicha superficie en:

a) Km^2 ; b) Hm^2 ; c) mm^2

12) Para revestir una cámara frigorífica se utilizan placas de PVC. Si cada placa tiene 20.000 cm^2: a) ¿a cuántos m^2equivalen?; b) ¿cuántas placas se necesitarán para revestir 36 m^2?

13) El volumen total de una olla de cocción en una fábrica de galletitas es de 180 dm3. Expresar dicho volumen en: a) cm^3; b) m^3; c) mm^3.

14) En un microscopio se observa que el tamaño de 3 células es diferente. La 1ra. presenta un tamaño de 7.000 nm, la 2da. de 7,5 µm y la 3ra. de 50.000 Å. Ordenar las 3 de manera decreciente.

15) Un transporte de productos alimenticios parte desde La Adela y debe recorrer 275 km para llegar a Santa Rosa. El camión viaja a 27 m/s durante todo el trayecto.

a) ¿Cuál es la velocidad en km/h?.
b) ¿Cuánto tarda en llegar a destino?.

16) La masa de la bacteria Escherichia Coli es de 7×10^{-16} Kg (0,0000000000000007 Kg). ¿A cuántos pg equivale esta medida?.

17) En un frigorífico bovino para faenar se utilizan 19.000 L de agua por día. El frigorífico dispone de cisternas de 50 HL de capacidad para almacenar el agua y las mismas se cargan una sola vez en el día. ¿Cuántas cisternas son necesarias para que se cubra la demanda diaria?.

18) Una cosecha de trigo rinde 30 qq/Ha. Sabiendo que 1 qq (quintal métrico) equivale a 100 kg, calcular el rendimiento en Ton/m^2.

19) Un servicio de catering elabora su plato principal a base de carne de cerdo y una salsa en cuya preparación se tiene que colocar 0,7 g de orégano por plato. Este fin de semana se tiene que preparar este plato para tres fiestas en donde asistirán 350, 150 y 270 personas. ¿Cuántos paquetes de orégano se deberán comprar para cubrir dicho servicio si la presentación comercial de este condimento es en paquetes de 0,035 Kg?.

20) En una heladería se tiene que renovar el stock para toda una semana. Para preparar un determinado gusto utilizan 200 g de crema por cada lata de helado de 10 L.

a) ¿Cuántos Kg de crema van a necesitar para fabricar 20 latas?

b) Pasar los 10 L que contiene una lata a cm^3.

21) Un camión transporta leche y el peso total es de 27 Ton. El camión tiene un peso de 16300 Kg. ¿Cuántos L de leche lleva ese camión si la densidad de la leche transportada es de 1,03 Kg/L?.

22) Una empresa de transporte de alimentos tiene una flota de 16 camiones para hacer los repartos en toda la provincia. Por semana los camiones consumen en total 14.000 L de combustible. El propietario quiere construir una cisterna de almacenamiento de combustible para abastecerse durante todo un mes. ¿De cuántos KL deberá ser esa cisterna?.

Funciones

1) Representar gráficamente (en papel cuadriculado o milimetrado) las siguientes ecuaciones. Calcular la pendiente y ordenada al origen (m y b).

a. $y = 5x - 3$
b. $y = -3x + 2$
c. $x - 5 = -y$
d. $y - 1 = x$
e. $-y = -3x - 3$
f. $-y - x = 4$

2) Con las siguientes tablas de valores que representan una recta, calcular la pendiente, la ordenada al origen, plantear la ecuación y graficarlas**.**

a)

X	y
0	-1
1	-2

b)

x	y
-1	-2
0	0

c)

x	y
-1	- 1/3
0	2

d)

x	y
2	-6
-1	0

e)

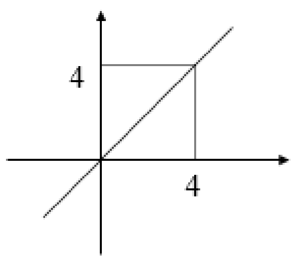
x	y
0	1
-1	0

3) Hallar las ecuaciones de las rectas y graficarlas.

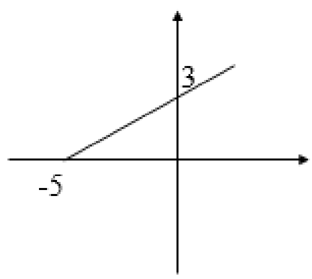
a. $P_1: (2; 4), P_2: (5; 0)$
b. $P_1: (3; 4), P_2: (6; 8)$
c. $m = \frac{1}{3}; b = -1$
d. $m = -2; P: (3; 6)$
e. $m = -3; P: (1; 2)$

4) Dadas las siguientes rectas, hallar la ecuación de las mismas y demostrar si el punto P: (1; 0) pertenece o no a alguna de ellas.

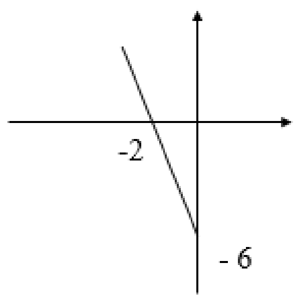
a)



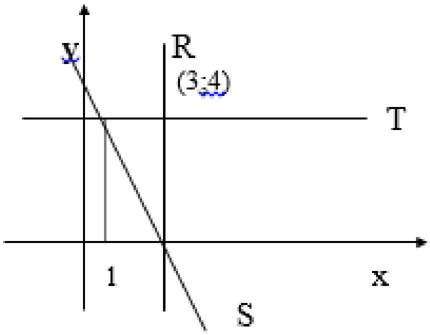
b)



c)



5) Siendo la recta R perpendicular al eje x, hallar las expresiones matemáticas de T y S si T es paralela al eje x.



6) Representar gráficamente a la ecuación lineal y = 3 x. Primero realizamos una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

7) Representemos gráficamente a la función lineal y = 2 3 x – 1. Nuevamente, se realiza primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego se ubican los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

8) Determinemos la ecuación de la recta de pendiente m = (–1) que pasa por el punto (2; 5)

<u>Funciones exponenciales y logarítmicas</u>

1) Calcular el valor de las incógnitas aplicando el logaritmo que corresponda según la base dada.

a. $\dfrac{e^{3x}\,.\,e^{-4x}\,.\,e^{5x}}{e^{-3x}} + 5 = 7$

b. $\dfrac{10^{-3x}\,.\,10^{6x}\,.\,10^{4x}}{10^{-2x}} = 0{,}4343$

2) Aplicar el logaritmo decimal

a) $x = \dfrac{\sqrt[3]{12}\,.\,0{,}2^3}{3{,}5} + 5$

b) $X = \dfrac{\sqrt[4]{0{,}3^2}}{5^{\frac{1}{3}}} + 5$

c) $X = \dfrac{\sqrt[3]{58^2}\,.\,2^2.\,5^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{3}{6}}}$

d) $X = \dfrac{0{,}1^2\,.\,5{,}6^3}{15} + 2{,}303$

e) $X = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} . \ 2^5 . \ 9^3}{24 \ .2^{\frac{1}{2}}}$

f) $X = \sqrt[6]{0,1298}$

g) $X = 7^{\frac{2}{3}} . \ 5^{\frac{1}{4}}$

h) $X = 1 + \dfrac{7,5^3}{2,1^2}$

i) $X = \dfrac{0,1 \ . \ 0,01 \ . \ 100}{10} + 10$

j) $X = \dfrac{\sqrt[4]{34} \ .0,3^3}{1,2}$

3) Dada la ecuación $I = I_0 \ . e^{-\varepsilon l c}$ aplique el logaritmo que desee para calcular I.

4) Dada la siguiente ecuación$B = B_0 \ . 10^{\alpha\tau}$ aplique el logaritmo natural para despejar α

5) Dada $N = N_0 \ . e^{-\alpha\tau}$ despejar N_0 aplicando logaritmo decimal.

6) Dada la siguiente ecuación exponencial $B = B_0 \ . e^{\alpha\tau}$ aplicar logaritmo natural y luego logaritmo decimal para calcular B si:

B_0 = 10^3 células/ml.
α = 0,04 hora^{-1}
τ = 5 horas

7) Dada la siguiente función exponencial $B = B_0 \ . e^{-\alpha\tau}$ aplicar logaritmo natural, luego decimal y calcular τ, si:

B_0 = 10000 bacterias /ml
B = 500 bacterias /ml.
α = 0,2 hora $^{-1}$

Resultados

Conjuntos numéricos

1.

RESPUESTA	ECUACION ALGEBRAICA
1	44 / 44
2	4/4 + 4/4
3	(4 + 4 + 4) / 4
4	(4 – 4) /4 + 4
5	(4.4+4) / 4
6	(4 + 4) /4 + 4
7	(44 / 4) - 4
8	(4 * 4) – 4 – 4
9	4/4 + 4 + 4
10	(44 – 4) / 4

2.

Preg.	Fracciones	Expresión decimal
A	3/5 =	0,6
B	3/40 =	0,075
C	153/4 =	38,25
D	-4/9 =	- 0,444
E	25/6 =	4,167
F	-5/18 =	- 0,278
G	-1/100 =	- 0,01
H	-1/30 =	- 0,033
I	3/7 =	0,429

Orden creciente

-4/9 =	-0,444
-5/18 =	-0,278
-1/30 =	-0,033
-1/100 =	-0,01
3/40 =	0,075
3/7 =	0,429
3/5 =	0,6
25/6 =	4,167
153/4 =	38,25

3.

			Fracción irreducible
a)	0.55 =	55/100	11/20
b)	-0.32 =	-32/100	- 8/25
c)	1.4 =	14/10	7/5
d)	10.6 =	106/10	53/5
e)	0.255 =	255/1000	21/200
f)	-4.25 =	-425/100	-17/4
g)	25.8 =	258/10	129/5
h)	5.75 =	575/100	23/4

Calculo porcentual

1) 2.560
2) 869.130.000 bacterias
3) Francia ……………. $ 8,06
   España ……………. $ 8,23
   Estados Unidos .. $ 8,34
   Brasil …………….. $ 8,58
   Angola ……………. $ 10,14
   Argentina ………… $ 11,34
   Venezuela ……….. $ 59,93
4) $78.750
5) 91,89%
6) 315 g
7) 7,69 %
8) 42 autos blancos y 6 rojos
9) Año 2015: se vendieron 207.200 camionetas, quedan en stock 352.800
   Año 2016: se vendieron 88.200 camionetas, quedan en stock 264.600
   Año 2017: se vendieron 42.336 camionetas, quedan en stock 222.264
   Año 2018: se vendieron 100.241 camionetas, quedan en stock 122.023
   Año 2019: se vendieron 28.064 camionetas, quedan en stock 93.959
   Año 2020: se vendieron 70.469 camionetas, quedan en stock 23.490
10) 8,1 Kg
   Composición:
   Rollo de alfalfa 1,21 Kg (15%)
   Pellet de girasol 1,08 Kg (13,3%)
   Grano de maíz 5,81 Kg (71,7%)
11) Composición:
   Diluyente comercial 60%, 750mL
   Agua 20%, 250mL
   Yema de huevo 20%, 250Ml
12) 6%

Potenciación

1) 1
2) 1
3) 6×10^{-11}
4) 4×10^{7}
5) 750
6) $-2,5 \times 10^{12}$
7) -2×10^{6}
8) 1×10^{-1}
9) Corregir en la guía. Es 25x.
   $1,33 \times 10^{-1}$
10) $7,5 \times 10^{-1}$
11) 1×10^{1}
12) $1,4 \times 10^{10}$
13) $1,8 \times 10^{-10}$
14) $1,6 \times 10^{-4}$
15) 1×10^{33}
16) $1,5 \times 10^{-5}$
17) 1×10^{-9}
18) $8,33 \times 10^{1}$
19) 3,75
20) $-3,33 \times 10^{7}$

Notación Científica

1) 3×10^{-2}
2) $3{,}1 \times 10^{-5}$
3) 1×10^{-4}
4) $5{,}8 \times 10^{-11}$
5) $4{,}83 \times 10^{-8}$
6) $5{,}63 \times 10^{0}$
7) 1×10^{-2}
8) 1×10^{2}
9) 2×10^{-4}
10) $5{,}7 \times 10^{0}$
11) $6{,}3 \times 10^{2}$
12) $4{,}9 \times 10^{6}$
13) 1×10^{-4}
14) $4{,}535 \times 10^{0}$
15) 5×10^{-1}
16) 8×10^{-10}
17) Sí, es un número muy grande. Se corre la coma hacia la derecha 18 lugares. Está expresado en notación científica.
18) El inciso b está expresado en notación científica. a) $5{,}83 \times 10^{8}$. c) 1×10^{7}. d) $3{,}6 \times 10^{-13}$. e) $1{,}578 \times 10^{-4}$. f) $6{,}34 \times 10^{-6}$.
19) $1{,}5 \times 10^{8}$
20) 2×10^{7}
21) $1{,}1916 \times 10^{8}$
22) $1{,}67248 \times 10^{-16}$

Ecuaciones

Ecuaciones de primer grado.

1) 83,33 o $8{,}333.10^{1}$
2) -2,429
3) 1
4) $1{,}25 \,.\, 10^{-12}$
5) $1{,}917.10^{1}$
6) 15
7) 9
8) -19,2 ó $-1{,}92.10^{1}$
9) -9/2 ó 4,5
10) 3,75
11) -9,882
12) 0,714 ó $7{,}14.10^{-1}$
13) 1
14) 3
15) -24,5 ó $2{,}45.10^{1}$
16) 5
17) -1
18) 1,527
19) -1,846
20) -15

Unidades

1) 0,5 L.
2) 14.500.000 cm.
3) 0,00034 Kg.
4) 0,07 dL.
5) 830 m.
6) 0,06 Kg.
7) 6,33 minutos.
8) 10.800 segundos.
9) a) 288 Km/h; b) 4.800 m/min.; c) 80 m/s.
10) a) 600.000 ng/L; b) 0,0000006 g/mL; c) 0,00000006 Kg/dL
11) a) 0,00468 Km2; b) 0,468 Hm2; c) 4.680.000.000 mm2
12) a) 2 m2; b) 18 placas
13) a) 180.000 cm3; b) 0,18 m3; c) 180.000.000 mm3
14) De mayor a menor 2da. célula, 1ra. célula y 3ra. célula.
15) a) 97,2 Km/h; b) 2,82 horas (casi 3 horas)
16) 0,7 pg.
17) 3,8 cisternas (4 cisternas).
18) 0,0003 Ton/m2.
19) 15,4 paquetes (16 paquetes).
20) a) 4 Kg; b) 10.000 cm3
21) 10.388,35 L

Funciones

1)
a) (m=5;b= -3)
b) (m=-3; b=2)
c) (m=-1; b=5)
d) (m=1; b=1)
e) (m=3; b=3)
f) (m=-1; b=- 4)

2)
a) (m=-1; b= -1)
b) (m= 2; b= 0)
c) (m= 7/3; b= 2)
d) (m= -2; b= -2)
e) (m=1; b= 1)

3)
a) y= -4/3 +20/3
b) y= 4/3x +1
c) y=1/3x-1
d) y= -2x+12
e) y=-3x+5

4)
a) y=x
b) y= 3/5 x +3
c) y = -3x -6

5)
T: y =4
S: y = - 2x+ 6

8) y = -1x +8

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1)
a) x= $9{,}9.10^{-2}$
b) x= -4.10^{-2}

2) aplicar el logaritmo decimal

a) 5,0114
b) -4,68
c) 5,12 . 10
d)2,42
e)$1{,}19.10^{3}$
f) $7{,}115\ .10^{-1}$
g) 5,47
h) 9,66.10
i) 1,001.10
j) $5{,}4.\ 10^{-2}$

3) $ln\left(\frac{I}{Io}\right) = -\mathcal{E}lc$

4) $\frac{Log\left(\frac{B}{Bo}\right)}{t} = \alpha$

5) $antilog\ (log\ N + \alpha t\ 0{,}4343) = No$

6) Rta: B=1221,35 cel/mL

7) Rta: t= 14,98 horas

Bibliografía

- Santillana (2006) Matemáticas I. Vol. 11. Ed. La Nación. “La Enciclopedia del Estudiante”.
- Gareis, M. I, Roldán, M. (2021) “Preliminares de Matemática”. Facultad de Ingeniería, UNLPam.
- Paenza,A. (2015) "Matemática siento por ciento". Bs.As., Ed. Página 12.
- “¿Puedes resolver este difícil problema de geometría plana solo aplicando teoremas básicos?” Audiovisual. Academia Internet. YouTube: https://youtu.be/pUwIb_NKKqI?si=-U1fwpA2nkgLIjpF
- Boeris, M. A.; Bilbao, M.G.; Anconitani, M.M.; Marengo, M.L.; Barbará, M.A.; Tortone, C.A.; Schwindt, C.H..(2020). Guía de Cursada 2020; Cátedra de Física Biológica de la Facultad de Cs. Veterinarias, UNLPam.
- Cura, Sandra Z. (2023). Cuadernillo ingresantes. Matemática. Facultad de Ciencias Veterinarias, UNLPam.